TEORIA DE JUEGOS

KEN BINMORE
University of Michigan
Ann Arbor

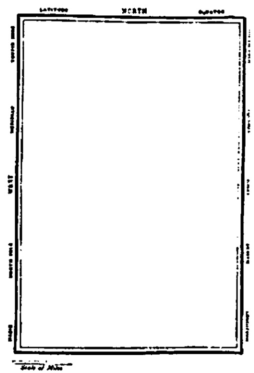
Traducción
ANTONI MALET TOMAS
Universidad Autónoma de Barcelona

Revisión técnica
CLARA PONSATI OBIOLS
Universidad Autónoma de Barcelona

McGraw-Hill
MADRID • BUENOS AIRES • CARACAS • GUATEMALA • LISBOA • MEXICO
NUEVA YORK • PANAMA • SAN JUAN • SANTAFE DE BOGOTA • SANTIAGO • SAO PAULO
AUCKLAND • HAMBURGO • LONDRES • MILAN • MONTREAL • NUEVA DELHI • PARIS
SAN FRANCISCO • SIDNEY • SINGAPUR • ST. LOUIS • TOKIO • TORONTO

Contenido

Guía didáctica



Carta de navegación oceánica

Escogiendo un rumbo

Este libro ha sido escrito a dos niveles distintos porque se dirige a dos clases distintas de estudiantes. Cada profesor, por tanto, debe escoger cuidadosamente entre el material aquí contenido, porque las cosas podrían ir mal si los alumnos no encajaran con los temas escogidos. O, para decir lo mismo de un modo más expresivo, cuando usted pretenda revelar la naturaleza de la liebre a sus estudiantes ándese con cuidado, no sea que acabe mostrándoles un gato por error. Como dijo Lewis Carroll, su público en este caso «suave y repentinamente se desvanecerá», como la tripulación de Bellman en *Hunting of the Snark*. Sin embargo, Bellman sólo tenía la carta de navegación oceánica que aparece aquí arriba para guiarse.

Introducción

El poeta Horacio aconsejaba a sus jóvenes discípulos empezar *in media res*. Creo que tenía razón. La manera de aprender teoría de juegos es ir directamente al primer capítulo y sumergirse en *medio de las cosas*. Esta introducción es para los débiles de corazón y la gente de mediana edad que quieren conocer las respuestas a algunas preguntas antes de comprometerse.

- ¿De qué trata la teoría de juegos?
- ¿De dónde proviene la teoría de juegos?
- ¿A dónde se dirige la teoría de juegos?
- ¿De qué nos puede servir la teoría de juegos?

Estas son grandes preguntas para las que no existen respuestas claras y elegantes. Una introducción sólo puede dar una somera indicación de las respuestas que ofrecen los especialistas en teoría de juegos[1]. Tal vez esto bastará para calmar el apetito.

0.1. ¿De qué trata la teoría de juegos?

Se desarrolla un juego cada vez que unos individuos se relacionan con otros. Cuando usted conduce un coche en una calle urbana y transitada, está practicando un juego con los conductores de los otros coches. Cuando usted puja en una subasta, está llevando a cabo un juego con los demás postores. Cuando toma una decisión sobre el precio al que intentará vender las latas de guisantes, la encargada de un supermercado está realizando un juego con sus clientes y con los y las encargados/as de supermercados rivales. Cuando una empresa y un sindicato negocian los salarios del próximo año, están manteniendo un juego. El abogado defensor y el fiscal practican un juego cuando deciden qué argumentos utilizar delante del jurado. Napoleón y Wellington estuvieron desarrollando un juego en la batalla de Waterloo, y lo mismo hicieron Kruschev y Kennedy durante la crisis de los misiles de Cuba.

Si todas estas situaciones son juegos, entonces evidentemente la teoría de juegos es algo importante. De hecho, se podría argumentar que todas las ciencias sociales no son sino subdisciplinas de la teoría de juegos. Esto no significa, sin embargo, que los especialistas en teoría de juegos disponen de respuestas para todos los problemas del mundo. Esto se debe a que la teoría de juegos, tal como se desarrolla por ahora, se ocupa sobre todo de qué ocurre cuando los individuos se relacionan de forma *racional*. Si esta

---

[1] El Capítulo 1 de mis *Essays on the Foundations of Game Theory* (Blackwell, 1990) es una introducción más extensa al tema. *Thinking Strategically* (Norton, 1991), de Dixit y Nalebuff, es una deliciosa colección de historias y anécdotas sobre cómo la teoría de juegos funciona en situaciones de la vida real. *Teoría de juegos y modelización económica* (Oxford University Press, 1990), de Kreps, es una introducción que pone énfasis en los usos de la teoría de juegos en la economía.

observación le sugiere devolver este libro de *Teoría de juegos* a la librería con la esperanza de que le devuelvan el dinero, piénseselo de nuevo. Nadie ha dicho que la gente siempre se conduce racionalmente. Pero tampoco es cierto que la gente actúe siempre irracionalmente. La mayoría de nosotros intentamos por lo menos gastar el dinero de una manera razonable, y normalmente no nos va muy mal. Si no fuera así, la teoría económica no funcionaría en absoluto. Ni siquiera cuando no pensamos las cosas con anticipación se puede deducir necesariamente que nos estamos conduciendo irracionalmente. De hecho la teoría de juegos ha cosechado algunos éxitos notables analizando el comportamiento de insectos y plantas, de quienes no podemos decir que piensen lo más mínimo. Su comportamiento es racional porque aquellos insectos y plantas cuyos genes los programaban para comportarse irracionalmente se han extinguido. La evolución los ha quitado de en medio. Y, de la misma forma que la evolución biológica actúa quitando de en medio comportamientos biológicamente inadaptados, otros tipos de evolución pueden actuar para quitar de en medio comportamientos social o económicamente inadaptados. Por ejemplo, empresas que conducen sus asuntos de forma estúpida tienden a quebrar y así desaparecen de la escena.

Tal vez usted esté de acuerdo en que las relaciones racionales entre grupos de individuos constituye un área de estudio apasionante, pero ¿por qué llamarle *teoría de juegos*? ¿No trivializamos los problemas que la gente afronta llamándoles *juegos*? Más grave aún, ¿no devaluamos nuestra categoría humana al reducir la lucha por realizarnos al estatus de una mera *jugada* en un juego?

Las respuestas apropiadas a estas cuestiones las ponen cabeza abajo. Cuanto más en serio nos tomamos las cuestiones de fondo, tanto más importante es que no nos dejemos desorientar por ilusiones. Una de las virtudes de la teoría de juegos es que usa el lenguaje de juegos de salón como el ajedrez o el póquer para discutir la *lógica* de las relaciones estratégicas. Sé que los jugadores de *bridge* en ocasiones disparan contra sus parejas. Yo mismo a veces he sentido la necesidad. Sin embargo, la mayoría de las veces la gente puede pensar los problemas estratégicos que se plantean en los juegos de salón *desapasionadamente*. Esto es, están dispuestos a seguir a la lógica donde quiera que les lleve sin echarse las manos a la cabeza horrorizados si les lleva a un destino no deseado. Por tanto, al insistir en usar el lenguaje de los juegos de salón, los especialistas en teoría de juegos no resultan ser fríos y despiadados seguidores de Maquiavelo a quienes nada importan las penas de este mundo. Simplemente, están intentando separar aquellos aspectos de un problema que son susceptibles de ser analizados racionalmente y sin controversia de los que no lo son.

Por naturaleza, a los seres humanos no se les da muy bien pensar sobre los problemas de las relaciones estratégicas. Nos inquietamos cuando hemos de enfrentarnos a razonamientos circulares. Sin embargo, los razonamientos circulares no pueden ser evitados al considerar cuestiones estratégicas. Si John y Mary están jugando a un juego, la elección de estrategia de John dependerá de su predicción acerca de cuál será la estrategia que Mary

elegirá. Pero, simultáneamente, ella está eligiendo una estrategia usando su predicción acerca de la elección estratégica de John. Dado que la teoría de juegos se basa necesariamente en esta clase de lógica retorcida, tal vez no sea sorprendente que abunde en sorpresas y paradojas.

- ¿Le parece a usted posible que en la reunión de un comité alguien considerara que la solución óptima es votar la alternativa que le *gusta menos*?
- ¿Podría ser una buena idea que un general decidiera si atacar hoy o mañana *tirando una moneda al aire*?
- ¿Para un jugador de póquer, puede ser una solución óptima apostar siempre el máximo cuando le sirven *la peor mano*?
- ¿Para alguien que ha de comerciar, podría llegar a tener sentido empezar por *tirar parte de la mercancía*?
- ¿Podría llegar a ser racional que alguien que quiere vender una casa utilice una subasta en la que el mayor postor se queda con la casa pero sólo paga lo que ha ofrecido el *segundo mayor* postor?

Usted ya se imagina, evidentemente, que la respuesta aparentemente absurda es la correcta en cada caso. Vamos a tomar en consideración la primera y la última de estas questiones para intentar entender por qué nuestra intuición nos es tan poco útil. Simultáneamente, esto nos dará una idea de conjunto del libro, porque los problemas del primer tipo se discuten en el Capítulo 1, al comienzo del libro, y los del útimo tipo en el Capítulo 11, hacia el final.

0.1.1. Votaciones estratégicas

Boris, Horace y Maurice constituyen el comité de miembros de la muy exclusiva Sociedad de los Poetas Muertos. Una mañana, el punto final del orden del día es la propuesta de admitir como miembro a Alice. Otro posible candidato llamado Bob no es mencionado, por lo que se propone modificar este último punto. La modificación propuesta dice que el nombre de Alice debería ser reemplazado por el de Bob. Las reglas de voto para comités ordenan que las propuestas de modificación se voten en el orden en que fueron propuestas. Por tanto, el comité empieza votando si Bob debería reemplazar a Alice. Si Alice gana, entonces votarán si Alice o Nadie debería ser aceptado como nuevo miembro. Si Bob gana, entonces votarán si Bob o Nadie debería ser aceptado como nuevo miembro. La Figura 0.1(a) es un diagrama que representa el orden en el que tiene lugar la votación. La Figura 0.1(b) muestra cómo los tres miembros del comité ordenan los tres resultados posibles.

Las líneas dobles de la Figura 0.1(a) indican quién ganaría la votación si todos votaran de acuerdo con sus preferencias. Por ejemplo, en una votación entre Alice y Bob, Alice ganaría porque Boris y Horace prefieren Alice en lugar de Bob, y Maurice perdería la votación. Así, si no se da una votación

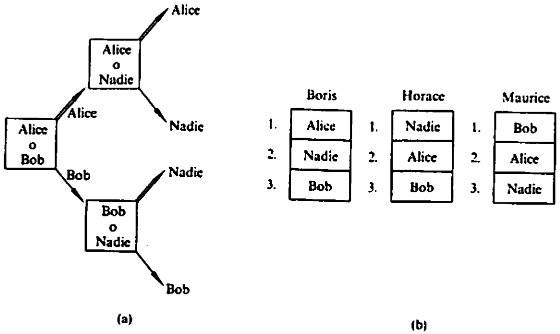


Figura 0.1. Votaciones estratégicas.

estratégica, Alice será elegida miembro del club porque también ganará cuando se enfrente contra Nadie.

Sin embargo, si Horace piensa a largo plazo, verá que no tiene sentido votar contra Bob en la primera votación. Si Bob gana la primera votación, Nadie triunfará en la segunda[2], y Nadie es la primera preferencia de Horace. Por tanto, Horace debería negar el voto a Alice en la primera votación y dárselo a Bob, que es el candidato que le gusta menos. Si Boris y Maurice no votan estratégicamente, el resultado será que Nadie es elegido.

Pero la historia no acaba aquí. Maurice puede prever que Horace votará estratégicamente. Si es así, Maurice también votará estratégicamente, votando a Bob en lugar de a Alice. En este caso Maurice dejará de votar al candidato que le gusta más. La razón para hacer esto es que así se asegura que Alice es elegida en lugar de Nadie.

El razonamiento utilizado por Horace y Maurice en esta historia se llama *inducción hacia atrás*. Predicen lo que ocurriría en el futuro, y entonces razonan hacia atrás hasta el presente. El matemático Zermelo aplicó el mismo tipo de razonamiento al ajedrez hace muchos años, en 1912. Por esta razón, en la Sección 1.4 este proceso se llama *algoritmo de Zermelo*.

A los especialistas en teoría de juegos les interesa lo que ocurre cuando todo el mundo razona óptimamente. En este caso, esto significa que todos usan el algoritmo de Zermelo y, por tanto, todos votan estratégicamente. ¿Significa esto que Alice resulta elegida? ¡Tenga por seguro que esto podrá saberlo después de leer el Capítulo 1!

[2] ¿Por qué no tiene sentido que se vote estratégicamente en la segunda votación?

0.1.2. Subastas

Econ 0.1.3 →

Los Mad Hatters, como el hombrecito que acaba de aparecer en el margen, están pensados para ayudarle a usted a orientarse a través del libro. La Guía Didáctica explica detalladamente lo que significan. El de aquí se dirige corriendo a la Sección 0.1.3 para no tener que aprender algo de economía. La gente de matemáticas tal vez le consideren inteligente. Como dijo Lewis Carroll:

> ¿Y qué significan todos estos misterios para mi
> cuya vida se llena de índices y raíces?
>
> $$x^2 + 7x + 53$$
> $$= \cdots 11/3$$

Sin embargo, no sacará gran cosa de este libro, si sólo lee las partes matemáticas.

Alice quiere conseguir el mejor precio posible por su preciosa casa. Tiene dos posibles compradores, Horace y Maurice. Si supiera el precio máximo que cada uno está dispuesto a pagar, el problema sería fácil. Sin embargo, aunque no sabe cuáles son sus precios de reserva, Alice no está en la ignorancia total. Es de conocimiento público que cada comprador potencial tiene un precio de reserva de tres o cuatro millones de dolares, y que ambos valores son igualmente probables. Además, los dos precios de reserva son independientes entre sí (Sección 2.1.2).

Un subastador le aconseja celebrar «subasta de segundo precio». En una subasta de este tipo, cada postor encierra su oferta en un sobre. Entonces, los sobres son abiertos en público y la casa se vende al mejor postor[3], pero no al precio de su oferta. Se vende, por el contrario, al precio más alto *ofertado por un perdedor*. La ventaja de este arreglo, explica el subastador, es que induce a un individuo racional a pujar según su *verdadero* precio de reserva. Horace, por ejemplo, razonaría así. Supongamos que la puja de Maurice es *menor* que mi precio de reserva. Entonces quiero ganar la subasta, y para hacerlo me basta con pujar fielmente según mi precio de reserva. Por otra parte, si la puja de Maurice es *mayor* que mi precio de reserva, entonces no quiero ganar, y me puedo garantizar el no hacerlo pujando fielmente según mi precio de reserva. En una subasta de segundo precio, decir la verdad sobre el precio de reserva es una propuesta de las que «si-sale-cara-yo-gano-si-sale-cruz-tu-pierdes». Los especialistas en teoría de juegos dicen que pujar verazmente es una estrategia que *domina* a las demás alternativas.

Alice entiende todo esto, pero no le gusta mucho lo que oye. Le parece obvio que conseguirá algo mejor vendiendo la casa por el mayor de los precios pujados que por el segundo mayor precio. Por tanto, despide al primer subastador y en su lugar contrata a un segundo subastador que le

[3] Si hay un empate, se rompe por medio del azar.

dice lo que ella quiere oír. Alice organiza una subasta de oferta en sobre cerrado, como la del primer subastador, con la excepción que la casa será vendida al mayor postor al precio por él (o ella) pujado.

Mates 0.1.3 ⟶

Pero Alice se equivoca. El precio de venta esperado es 3 1/4 millones en ambos casos[4]. Esto es fácil de ver en el caso de la subasta de segundo precio. Alice ganará entonces 3 millones, excepto si Horace y Maurice tienen ambos un precio de reserva de 4 millones de dólares. La probabilidad de que ambos tengan un precio de reserva alto es $1/2 \times 1/2 = 1/4$. Su precio esperado de venta en millones de dolares es, por tanto, $3 \times 3/4 + 4 \times 1/4 = 3\ 1/4$.

Tal vez esta referencia a probabilidades y valores esperados le hace sentirse aprensivo. Si éste es el caso, fíjese bien en el Mad Hatter que ha aparecido en el margen y sígale corriendo a la siguiente sección. Lo que usted necesita saber acerca de probabilidades y valores esperados (que no es mucho) será revisado en el Capítulo 2. Por lo que se refiere a las matemáticas que el Mad Hatter, corriendo, quiere evitar, podría utilizarlas para comprobar si este libro es adecuado para alguien con sus conocimientos actuales. Espero que al final del libro un argumento de este tipo parezca transparentemente claro. Sin embargo, ¡si usted consigue ahora algo más que hacerse una idea general de lo que está pasando, entonces tal vez debería plantearse la lectura de un libro más avanzado![5].

Para averiguar el precio de venta que Alice puede esperar en una subasta «de primer precio» de puja secreta necesitamos resolver el problema de puja que una subasta así plantea a Horace y Maurice. Un consultor especialista en teoría de juegos no tendrá razón alguna para no aconsejar a alguien con un precio de reserva de 3 millones de dólares que puje fielmente por este precio. Sin embargo, si Horace tiene un precio de reserva *alto* de 4 millones de dólares, puede que el especialista en teoría de juegos le dé algunos consejos curiosos. El especialista en teoría de juegos le explicará que, sea cual sea la puja que Horace puede estar pensando en encerrar en el sobre, existe el riesgo de que Maurice la prediga. Si lo hace, Maurice ganará la subasta pujando por una peseta más en aquellas ocasiones en que también tiene un precio de reserva alto. El único modo en que Horace puede estar seguro de dejar a Maurice haciendo acertijos es usando una *estrategia mixta*. Lo que esto significa es que Horace debería *aleatorizar* sobre las pujas que es razonable esperar de él.

Si Horace todavía le escucha, el especialista en teoría de juegos se pondrá ahora a explicar en serio *cómo* debería aleatorizar Horace. El consejo puede ser algo así. Nunca puje menos de 3 millones de dólares o más de 3 1/2 millones. Aleatorice sobre todas las pujas entre 3 millones y 3 1/2 millones de dólares de tal manera que la probabilidad de pujar menos de b dólares sea precisamente $(b - 3)/(4 - b)$.

[4] Supuesto que Horace y Maurice pujan racionalmente y son riesgo-neutrales (Sección 3.4.3).
[5] Como, por ejemplo, *Game Theory* (MIT Press, 1991), de Fudenberg y Tirole, o *Game Theory: Analysis of Conflict* (Harvard University Press, 1991), de Myerson.

Si Maurice está escuchando exactamente el mismo consejo de un especialista en teoría de juegos, ¿cuánto debería Horace esperar ganar si su instrumento *aleatorizador* le dice que encierre en el sobre una puja de b millones de dólares? Si supera a Maurice en la puja, habrá ganado $(4 - b)$ millones de dólares, porque ésta es la diferencia entre lo que paga y lo que la casa vale para él. Si pierde en la subasta, no habrá ganado nada. ¿Cuándo ganará, Horace? La mitad de las veces es seguro que ganará, porque el precio de reserva de Maurice sólo será de 3 millones de dólares. La otra mitad de las veces la probabilidad de que Horace gane será $(b - 3)/(4 - b)$, porque ésta es la probabilidad de que Maurice puje menos de b millones de dólares cuando su precio de reserva es 4 millones de dólares. Así pues, la probabilidad total de que Horace gane cuando puja b millones de dólares es

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{b - 3}{4 - b}\right) = \frac{1}{2(4 - b)}.$$

La ganancia esperada se obtiene multiplicando esta probabilidad por $(4 - b)$ millones de dólares que es lo que obtiene cuando gana. Por tanto, la ganancia esperada siempre es de 1/2 millón de dólares, sea cual sea la puja de b millones de dólares, entre 3 y 3 1/2 millones de dólares, que haya podido hacer.

La razón por la que los especialistas en teoría de juegos ofrecerán este consejo tan complicado a Horace y Maurice es que, si lo siguen, cada uno de ellos estará dando una respuesta *óptima* a la elección estratégica del otro. En particular, no hay nada que Horace pueda hacer para mejorar el 1/2 millón de dólares. Ciertamente no estará interesado en pujar B millones de dólares, si $B > 3\ 1/2$ porque, aunque ello le garantiza ganar la subasta, su victoria será pírrica, toda vez que su triunfo sólo le proporcionará $(4 - B)$ millones de dólares[6].

Está claro que Alice concluyó prematuramente que en esta situación las cosas son «obvias». La mayor parte del tiempo, Horace y Maurice pujarán muy por debajo de sus verdaderos precios de reserva. Por tanto, Alice necesita hacer bastantes cálculos antes de poder opinar sobre los méritos relativos de las subastas de primera y segunda puja. Si supone que Horace y Maurice siguen los consejos de sus especialistas en teoría de juegos, Alice hallará que el precio esperado de venta es *exactamente el mismo* en una subasta de primera puja que en una de segunda puja —es decir, 3 1/4 millones de dólares—. También sería el mismo en otros varios tipos de subasta. En particular, el precio esperado de venta es exactamente el mismo en el tipo de subasta familiar en el que los compradores van subiendo sobre las pujas de los otros hasta que sólo queda uno que puja.

[6] Suponiendo que su precio de reserva es alto. Si es bajo, nunca querrá pujar por encima de los 3 millones de dólares.

¿Deberíamos concluir que Alice está perdiendo el tiempo al buscar una mejor subasta? ¡En absoluto! Si Alice se lee esta *Teoría de juegos* hasta la Sección 11.7.4, descubrirá que, si es inteligente, puede designar un mecanismo de subasta que aumenta el precio de venta esperado hasta un magnífico 3 1/2 millones de dólares.

0.1.3. ¿Cuál es la moraleja?

Los dos ejemplos anteriores pretenden mostrar claramente que la teoría de juegos sirve para algo. Nuestra intuición no educada no es muy fiable en situaciones estratégicas. Necesitamos entrenar nuestra intuición estratégica tomando en consideración ejemplos instructivos. No es necesario que estos ejemplos sean realistas. Por el contrario, en muchas ocasiones disfrutaremos de ventajas sustanciales estudiando *juegos*, si se eligen cuidadosamente. En estos juegos-juegos, nos podemos desentender de todos los detalles irrelevantes típicos de los problemas del mundo real, de manera que podemos centrar la atención en las cuestiones estratégicas —y para dar respuestas a estas cuestiones existe la teoría de juegos.

A menudo los especialistas en teoría de juegos introducen sus juegos-juegos con historias tontas. Es un poco tonto, por ejemplo, que los miembros del comité en el ejemplo de la votación estratégica se llamen Boris, Horace y Maurice[7]. Pero esta tontería tampoco carece de valor. Aquí nos permite desconectar nuestras emociones de los problemas. Nadie puede sentirse involucrado con personajes ficticios tales como Boris, Horace y Maurice. Sin embargo, si les pudiéramos identificar con individuos reales, ante el hecho que el presidente ha «manipulado el orden del día», o que Horace está pensando en «votar deshonestamente», podríamos dejar que la indignación apartara nuestra atención de las realidades estratégicas subyacentes. Para un especialista en teoría de juegos esto sería un error comparable al de un matemático que no respeta las leyes de la aritmética porque no le gustan los resultados que está obteniendo.

0.2. ¿De dónde proviene la teoría de juegos?

Filo 0.4 →

La teoría de juegos fue creada por Von Neumann y Morgenstern en su libro clásico *The Theory of Games and Economic Behavior*, publicado en 1944. Otros habían anticipado algunas ideas. Los economistas Cournot y Edgeworth fueron particularmente innovadores en el siglo XIX. Otras contribuciones posteriores mencionadas en este libro fueron hechas por los matemáticos Borel y Zermelo. El mismo Von Neumann ya había puesto los fundamentos

[7] Aquellos cuya lengua materna no sea el inglés «de la reina» tal vez se sorprendan al saber que estos nombres riman.

en un artículo publicado en 1928. Sin embargo, no fue hasta que apareció el libro de Von Neumann y Morgenstern que el mundo comprendió cuán potente era el instrumento descubierto para estudiar las relaciones humanas.

Cuando corrió la voz, la gente se tiraba por la ventana llevada por el entusiamo. Las ciencias sociales, se pensó, conocerían una revolución de hoy para mañana. Pero no ocurrió así. El libro de Von Neumann y Morgenstern resultó ser sólo el primer paso en un largo camino. Pero no hay mente más cerrada que la del creyente desilusionado, y cuando resultó evidente que *The Theory of Games and Economic Behavior* no podía ser comparado con las tablas de la ley que Moisés se bajó de la montaña, la teoría de juegos languideció en la inactividad. Todavía encontramos profesores mayores que nos explican que la teoría de juegos no sirve para nada porque la vida no es un «juego de suma cero», o porque se puede obtener el resultado que uno quiera seleccionando el apropiado «concepto de solución cooperativa».

Afortunadamente las cosas han evolucionado con mucha rapidez en los últimos veinte años, y éste y otros libros modernos sobre teoría de juegos ya no padecen algunos de los presupuestos restrictivos que Von Neumann y Morgenstern consideraron necesarios para progresar. Como resultado, lo que la teoría de juegos prometía en un principio se está empezando a cumplir. En los últimos años, sus repercusiones en la teoría económica sólo se pueden calificar de explosivas. Todavía es necesario, sin embargo, saber algo de la corta historia de la teoría de juegos, aunque sólo sea para entender por qué se usan algunos de sus términos.

Von Neumann y Morgenstern investigaron dos planteamientos distintos de la teoría de juegos. El primero de ellos es el planteamiento *estratégico* o *no cooperativo*. Este planteamiento requiere especificar muy detalladamente lo que los jugadores pueden y no pueden hacer durante el juego, y después buscar para cada jugador una estrategia *óptima*. De entrada, ni siquiera es evidente qué puede querer decir óptimo en este contexto. Lo que es mejor para un jugador depende de lo que los otros jugadores piensan hacer, y esto a su vez depende de lo que ellos piensan que el primer jugador hará. Von Neumann y Morgenstern resolvieron este problema en el caso particular de juegos con dos jugadores cuyos intereses son diametralmente opuestos. A estos juegos se les llama *estrictamente competitivos*, o de *suma cero*, porque cualquier ganancia para un jugador siempre se equilibra exactamente por una pérdida correspondiente para el otro jugador. El ajedrez, el backgammon y el póquer son juegos tratados habitualmente como juegos de suma cero.

En la segunda parte de su libro, Von Neuman y Morgenstern desarrollaron el planteamiento *coalicional* o *cooperativo*, en el que buscaron describir la conducta óptima en juegos con muchos jugadores. Puesto que éste es un problema mucho más difícil, no es de sorprender que sus resultados fueran mucho menos precisos que los alcanzados para el caso de suma cero y dos jugadores. En particular, Von Neumann y Morgenstern abandonaron todo intento de especificar estrategias óptimas para jugadores individuales. En lugar de ello se propusieron clasificar los modelos de formación de coaliciones que son consistentes con conductas racionales. La negociación, en cuanto a tal, no jugaba papel alguno en esta teoría. De hecho, hicieron suyo el punto de vista, que había predominado entre los economistas al menos desde la época de Edgeworth, según el cual los problemas de negociación entre dos personas son inherentemente *indeterminados*.

A principio de los años cincuenta, en una serie de artículos muy famosa el matemático John Nash rompió dos de las barreras que Von Neumann y Morgenstern se habían auto-impuesto. En el frente no cooperativo, estos parecen haber pensado que en estrategias la idea de *equilibrio*, introducida por Cournot en 1832, no era en sí misma una noción adecuada para construir sobre ella una teoría —de aquí que se restringieran a juegos de suma cero—. Sin embargo, la formulación general de Nash de la idea de equilibrio hizo ver claramente que una restricción así es innecesaria. Hoy día, la noción de *equilibrio de Nash*[8] es tal vez el más importante de los instrumentos que los especialistas en teoría de juegos tienen a su disposición. Nash también hizo contribuciones al planteamiento cooperativo de Von Neumann y Morgenstern. Nash no aceptó la idea de que la teoría de juegos debe considerar indeterminados los problemas de negociación entre dos personas, y procedió a ofrecer argumentos para determinarlos. Sus ideas sobre este tema fueron generalmente incomprendidas y, tal vez como consecuencia de ello, los años que la teoría de juegos pasó en Babia se gastaron principalmente desarrollando el planteamiento cooperativo de Von Neumann y Morgenstern en direcciones que finalmente resultaron ser improductivas.

La historia de la teoría de juegos en los últimos veinte años está demasiado repleta de incidentes para ser contada aquí. Algunos nombres, sin embargo, no deben ser pasados en silencio. El acróstico NASH puede ayudar a recordar quienes son. El propio Nash tiene la letra N, A es por Aumann, S es por Shapley y también por Selten y H es por Harsanyi. ¡Cuando llegue al final del libro ya no necesitará acrósticos!

Lo que es tal vez más importante sobre los últimos veinte años de teoría de juegos es que los mayores progresos se han dado en la teoría *no cooperativa*. Por esta razón, este libro se limita casi exclusivamente a esta rama de la disciplina. Esto no se debe a que yo piense que la teoría *cooperativa* de juegos no contiene resultados importantes, sino simplemente a que comparto con muchos otros la idea de que no se puede discutir razonablemente la rama cooperativa de la disciplina sin haber dominado en primer lugar la rama no cooperativa.

[8] Este aparece cuando la elección estratégica de cada jugador es la respuesta óptima a las elecciones estratégicas de los otros jugadores. A Horace y Maurice les fue aconsejado, por su consultor especialista en teoría de juegos, que usaran un equilibrio de Nash cuando se estaban preguntando cómo pujar en la subasta de primera puja de la Sección 0.1.2.

0.3. ¿A dónde se dirige la teoría de juegos?

Es difícil explicar a dónde se dirige la teoría de juegos a una audiencia que no sabe dónde se encuentra. Estas observaciones, por tanto, son para quienes ya saben algo de teoría de juegos.

Tengo opiniones muy decididas sobre la dirección que la teoría de juegos debería tomar, y es reconfortante ver que las cosas parece que se mueven en la dirección correcta. Pero he dejado estas opiniones prácticamente fuera del libro, porque creo que un libro de este nivel los aspectos controvertidos han de ser reducidos al máximo. Es justo, sin embargo, que en algún momento ponga las cartas boca arriba. Así pues tengo que decir que creo que la mayor parte de la literatura sobre «refinamientos del equilibrio de Nash» ha de ser catalogada junto con las obras de la escolástica medieval. Para ser incluso más polémico, quiero añadir que los intentos por hacer del bayesianismo los fundamentos de la teoría de juegos no deben ser comparados a la construcción de casas sobre arena, sino a la construcción de castillos en el aire. Visto retrospectivamente, nos parecerán realmente muy extraños los intentos actuales de hacer de la teoría bayesiana de la decisión algo más que un instrumento analítico conveniente[9].

Filo 0.4 →

Mi gesto de deferencia hacia el futuro es el Capítulo 9, que a algunos les podrá parecer un añadido peculiar. Trata de cómo se puede llegar a un equilibrio por medio de procesos evolucionistas de tanteo cuando los jugadores no son completamente racionales. La aparición de autómatas finitos en el Capítulo 8 también está motivada en parte por la importancia que concedo al encontrar vías de ataque sobre el problema de la racionalidad acotada en teoría de juegos. Por supuesto, quienes no estén de acuerdo conmigo sobre lo que nos espera pueden libremente saltarse este material.

0.4. ¿De qué nos puede servir la teoría de juegos?

Esta sección contiene algunas indicaciones sobre las aplicaciones de la teoría de juegos. La economía es el principal cliente para las ideas producidas por los especialistas en teoría de juegos, luego esta es la disciplina por la que debemos empezar.

0.4.1. Aplicaciones a la economía

No debería sorprender que la teoría de juegos haya encontrado aplicaciones directas en economía. Esta triste ciencia se supone que se ocupa de la distribución de recursos escasos. Si los recursos son escasos es porque hay

[9] Los Capítulos 4, 5 y 6 de mis *Essays on the Foundations of Game Theory* (Blackwell, 1990) ofrecen un sumario de mis ideas sobre estas cuestiones.

más gente que los quiere de la que puede llegar a tenerlos. Este panorama proporciona todos los ingredientes necesarios para un juego. Además, los economistas neoclásicos adoptaron el supuesto de que la gente actuará racionalmente en este juego. En un sentido, por tanto, la economía neoclásica no es sino una rama de la teoría de juegos. Los economistas que no se dan cuenta de ello son como el monsieur Jourdain de *Le Bourgeois Gentilhomme*, de Molière, que se sorprendió al saber que había estando hablando en prosa durante toda su vida sin saberlo. Sin embargo, aunque los economistas pueden haber sido desde siempre especialistas camuflados en teoría de juegos, no podían progresar por el hecho de no tener acceso a los instrumentos proporcionados por Von Neumann y Morgenstern. En consecuencia, sólo podían analizar juegos particularmente simples. Esto explica por qué el monopolio y la competencia perfecta se entienden bien, mientras que a todas las demás variedades de competencia imperfecta que se dan entre estos dos extremos sólo ahora se les está empezando a dar el tratamiento detallado que merecen.

La razón por la que el monopolio es simple desde el punto de vista de la teoría de juegos es que puede ser tratado como un juego con un único jugador. La razón por la que la competencia perfecta es simple es que el número de jugadores es de hecho infinito, de manera que cada agente individual no puede tener un efecto sobre agregados de mercado si él o ella actúa individualmente. Un ejemplo puede ayudar a clarificar este punto. También servirá para indicar por qué la teoría de juegos está tan íntimamente relacionada con el problema de la competencia imperfecta[10].

Oligopolio de Cournot. Una industria contiene N empresas, todas con un coste unitario constante c. Cada empresa se decide simultáneamente por una producción q_i. Cuando la producción total $q = q_1 + q_2 + \cdots + q_N$ llega al mercado, el precio al que se vende viene dado por la ecuación de demanda $p = D(q)$. El beneficio de la i-ésima empresa es, pues,

$$\pi_i = pq_i - cq_i = (D(q) - c)q_i,$$

que es igual a los ingresos menos el coste.

Un especialista en teoría de juegos considera un problema de oligopolio de Cournot como éste como un juego con N jugadores en el que cada uno escoge una estrategia q_i con el objetivo de maximizar el beneficio π_i. En un equilibrio de Nash, la elección estratégica de cada jugador será óptima en función de las elecciones estratégicas de los otros jugadores.

Para dar la respuesta óptima a las elecciones estratégicas de las demás empresas, la i-ésima empresa elegirá su propia estrategia q_i de manera que

$$\frac{\partial \pi_i}{\partial q_i} = D'(q)q_i + D(q) - c = 0.$$

[10] La Sección 7.2 se ocupa de las mismas ideas más detalladamente.

Si todas las firmas se comportan así, todas elegirán la misma producción. Así pues, $q_i = q/N$, donde

$$D'(q)\frac{q}{N} + D(q) - c = 0.$$

Considérese el caso especial en el que la elasticidad-precio de la demanda es constante. Esto sólo significa que $p = D(q) = kq^{-\varepsilon}$, donde k y ε son constantes positivas. La ecuación se simplifica así:

$$\frac{p}{c} = \left(1 - \frac{\varepsilon}{N}\right)^{-1}.$$

Los economistas están familiarizados con esta fórmula en el caso $N = 1$ como el margen que maximiza beneficios para un monopolista. Cuando $N \to \infty$, obtenemos $p = c$. Este es el resultado clásico de la competencia perfecta que dice que el precio de equilibrio debe igualar el coste marginal. Para valores intermedios de N obtenemos un resultado sobre el comportamiento de equilibrio en un modelo de competencia imperfecta.

Cálculos de este tipo no requieren un conocimiento especial de la teoría de juegos. Sin embargo, tan pronto como se toman en consideración modelos en los que la *secuencia temporal* o el *riesgo* son importantes, o en los que la forma de tratar la *información* es relevante, uno queda desamparado sin el andamiaje conceptual proporcionado por la teoría de juegos. Subastas, mercados de seguros, carreras de patentes, barreras a la entrada y negociación son sólo algunos de los temas de los que podemos ahora hablar con alguna autoridad, y de los que antes poco o nada útil podíamos decir. Algunos de estos temas son estudiados de forma preliminar en este libro. Sin embargo, para hallar las ideas de teoría de juegos explotadas sistemáticamente para la economía hay que acudir a otros textos[11]. Si intentáramos hacer esto aquí, no nos quedaría espacio para explicar la teoría en sí misma.

0.4.2. Aplicaciones a la ciencia política

La teoría de juegos no ha tenido el mismo impacto en la ciencia política que en economía. Tal vez esto se debe a que la gente se conduce menos racionalmente cuando lo que está en juego son ideas que cuando lo que está en juego es su dinero. Sin embargo, se ha convertido en un instrumento importante para clarificar la lógica subyacente de un cierto número de proble-

[11] Tal vez a la *Theory of Industrial Organization* (MIT Press, 1988), de Tirole, o a un nivel más avanzado, la *Game Theory* (MIT Press, 1991), de Fudenberg y Tirole.

mas paradigmáticos. Las votaciones estratégicas fueron mencionadas en la Sección 0.1.1. Ahora estudiaremos un modelo sencillo que persigue esclarecer cómo los partidos políticos eligen sus programas. Tiene un cierto aire de familia con los modelos económicos porque las empresas en activo en un sector industrial modifican su conducta cuando quieren desalentar la entrada de empresas nuevas en el sector.

La elección de programa. Este ejemplo empieza con dos partidos políticos, los Formalistas y los Idealistas. Ninguno de los dos se preocupa en absoluto por cuestiones de principio. Sólo se preocupan por el poder y, por tanto, eligen el programa con el único objetivo de maximizar el voto en las próximas elecciones. Los votantes, por otra parte, sólo se preocupan por cuestiones de principio y, por tanto, carecen por completo de fidelidad a los partidos. Para simplificar, las opiniones que un votante puede tener se identifican con los números reales en el intervalo $[0, 1]$[12]. Podemos imaginarnos que este intervalo representa el espectro político de izquierda a derecha. Así, alguien con la opinión $x = 0$, cree que la sociedad debería estar organizada como un hormiguero, mientras que alguien con la opinión $x = 1$ cree que debería estar organizada como una piscina llena de tiburones.

Cada partido centra su programa en algún punto del espectro político y no puede cambiar su posición posteriormente. Los votantes votan por el partido que se encuentra más cerca de su posición. Dado que se supone que los votantes se encuentran distribuidos uniformemente sobre el espectro político[13], es fácil ver cuántos votos conseguirá cada partido una vez que han elegido programa. El secreto está en buscar el *votante mediano* entre aquellos cuyas opiniones se encuentran entre los programas de ambos partidos. El votante mediano se encuentra a medio camino entre las posiciones políticas de los dos partidos. Luego los que se encuentran a la derecha del votante mediano votarán por un partido, y los que se encuentran a la izquierda lo harán por el otro. En la Figura 0.2(a) se da un ejemplo.

Supongamos que los partidos bajan al ruedo político uno a uno. Los Idealistas escogen programa en primer lugar, y luego lo hacen los Formalistas. ¿Dónde debería colocarse cada uno? Problemas como éste pueden ser resueltos por inducción hacia atrás, como se ha explicado en la Sección 0.1.1. Para cada programa posible x, los Idealistas se preguntan qué ocurriría si se colocaran en x. Si $x < 1/2$, los Formalistas responderían colocándose inmediatamente a la derecha de x. Entonces los Idealistas recogerían una fracción x de los votantes y los Formalistas recogerían $1 - x$. Por tanto, los Idealistas ganarían menos de la mitad del voto. Lo mismo ocurre si los Idealistas se sitúan en $x > 1/2$, excepto que ahora los Formalistas responderán colocándose inmediatamente a su izquierda. Por tanto, lo mejor para los Idealistas es colocarse en el centro del espectro

[12] El intervalo $[0, 1]$ es el conjunto de valores de x que satisfacen $0 \leqslant x \leqslant 1$.
[13] Esto simplemente significa que una fracción l de la población sostiene opiniones que se encuentran en cualquier intervalo de longitud l.

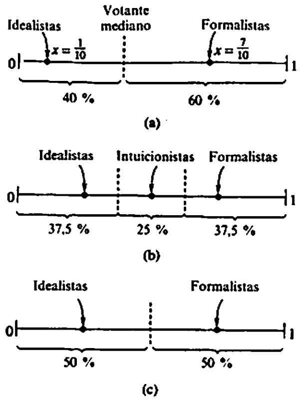


Figura 0.2. La elección de un programa político.

político. Los Formalistas también se colocarán en $x = 1/2$, y el voto se dividirá mitad y mitad.

Este modelo puede tener sentido en la escena política americana. Ciertamente es difícil para muchos europeos encontrar diferencias significativas entre Demócratas y Republicanos. El modelo, sin embargo, tiene poco parecido con la escena política europea. ¿Deberían los americanos deducir, por tanto, que los partidos políticos europeos de verdad se toman en serio los principios que hacen suyos? Una conclusión así sería prematura porque es dudoso que la situación europea pueda ser razonablemente analizada con un modelo de dos partidos, y esto es cierto incluso para un país como Gran Bretaña en el que sólo dos de los partidos consigue un número importante de votos en la mayoría de elecciones. Para explorar esta cuestión veamos cómo cambiarían las cosas si tuviéramos que tomar en consideración un tercer partido.

En este modelo el partido Intuicionista escoge programa después de los Idealistas y los Formalistas. Esto cambia mucho las cosas. Los Idealistas y los Formalistas ciertamente no se colocarán ahora en el centro del espectro político. Si lo hicieran, los Intuicionistas se podrían colocar inmediatamente a su derecha o izquierda. Entonces recogerían la mitad del voto dejando que los primeros partidos se dividan la otra mitad. Un razonamiento por inducción hacia atrás[14] hace ver que los Idealistas y los Formalistas se colocarán en $x = 1/4$ y $x = 3/4$, dejando que los Intuicionistas adopten la posición centrista $x = 1/2$, como se muestra en la Figura 0.2(b). Los primeros partidos recibirán entonces 3/8 de los votos cada uno, y los Intuicionistas sólo recogerán 1/4.

Pero, ¿por qué querrían los Intuicionistas entrar en la arena política, si están condenados al papel de Cenicienta, con los primeros partidos en el papel de Hermanas Feas? Modifiquemos, por tanto, el modelo de manera que los Intuicionistas consideren que vale la pena formar un partido sólo si pueden prever que recibirán más del 26% de los votos. En este caso los Idealistas se moverán un poco hacia el centro, aunque no lo bastante como para que los Intuicionistas puedan entrar flanqueándolos por la izquierda. Por tanto, sólo se moverán desde $x = 0{,}25$ a $x = 0{,}26$. Análogamente, los Formalistas se moverán desde $x = 0{,}75$ a $x = 0{,}74$. El resultado será una elección con dos partidos como en la Figura 0.2(c). En esta elección los Idealistas y los Formalistas se dividen el voto a partes iguales y los Intuicionistas se quedan fuera.

Un comentarista político ignorante de la amenaza que supone la entrada de los Intuicionistas podría fácilmente malinterpretar las razones por las que los Idealistas y los Formalistas han elegido sus programas. El comentarista podría incluso llegar a pensar que cada partido ni siquiera intentó hacerse con el centro por cuestiones de principio. Pero es sólo tras un análisis estratégico que la conducta de los dos partidos puede ser evaluada correctamente. Obsérvese, en particular, que su conducta ha sido determinada por algo que de hecho no llegó a ocurrir. Como Sherlock Holmes explicaba, a menudo lo importante es que el perro *no* ladró aquella noche.

0.4.3. Aplicaciones a la biología

Es imposible igualar el entusiasmo con que los biólogos evolucionistas que usan la teoría de juegos explican historias de conducta animal[15]. No sé si escogen historias poco delicadas deliberadamente, para dar un poco de sabor a sus relatos con implicaciones sexuales, o si éstos son realmente los mejores ejemplos para ilustrar de qué manera la teoría de juegos es relevante. En cualquier caso, lo que los biólogos dicen sobre el pez sol es esto.

Hay dos clases de machos en esta especie. El primero es un individuo regularmente hogareño que necesita siete años para alcanzar la madurez. Una vez alcanzada, construye un nido que atrae a las hembras que ponen huevos. Cuando los huevos han sido puestos, no sólo los fertiliza, sino que

[14] Algunas sutilezas surgen debido al hecho que disponemos de un número infinito de opiniones políticas. Aquí y en capítulos posteriores las podemos evitar suponiendo que los Idealistas y los Formalistas adoptan posiciones ligeramente más radicales que las descritas.

[15] Véase, por ejemplo, *Evolution and the Theory of Games* (Cambridge University Press, 1982), de Maynard Smith.

defiende la familia resultante lo mejor que puede; mientras, la hembra continúa con su vida independientemente. La otra clase de macho es un golfo. Por lo que dicen los biólogos, es poco más que un órgano sexual autopropulsado. Este posee una ventaja sobre los machos normales, que consiste en que alcanza la madurez en sólo dos años. Sin embargo, es incapaz de responsabilizarse de una familia. En lugar de ello, espera escondido hasta que una hembra ha puesto sus huevos respondiendo a las señales de un macho normal, y entonces sale corriendo a fertilizar los huevos antes de que el macho normal tenga la oportunidad de hacerlo. Si el golfo tiene éxito, el macho normal defiende una familia que no está relacionada con él en absoluto y que lleva por el contrario los genes del golfo.

La teoría de juegos sirve para explicar por qué las dos clases de machos pueden coexistir en proporciones fijas. Imaginemos un lago en el que viven N machos de la especie, donde N es un número grande. Podemos pensar pues en términos de un juego con N jugadores. El objetivo de cada jugador es maximizar el número de descendientes esperados. Las posibles estrategias de cada jugador en el juego son *hogareño* y *golfo*. El beneficio obtenido por un jugador al elegir una de estas estrategias depende de las estrategias elegidas por los otros jugadores. Si un número suficiente de jugadores escoge *hogareño*, la mejor estrategia es escoger *golfo*, porque habrá una gran oferta de nidos de cuco por explotar. Si un número suficiente de jugadores escoge *golfo*, la mejor estrategia es escoger *hogareño*, porque será difícil encontrar alguien de quien abusar. Por tanto, cuando *hogareño* es una elección estratégica suficientemente popular, se da el incentivo para ir contra corriente escogiendo *golfo*. Análogamente, cuando *golfo* es suficientemente popular, se da el incentivo para pasarse a *hogareño*.

Un equilibrio de Nash en este juego con N jugadores se da cuando la proporción de jugadores que escoge *hogareño* y la proporción que escoge *golfo* se equilibran tan exactamente que a cada jugador le resulta *indiferente* continuar con su actual estrategia o cambiarse a la estrategia alternativa. Entendido esto, es fácil entender por qué las dos clases de macho sobreviven y por qué las frecuencias de sus poblaciones permanecen estables —mejor dicho, *sería* fácil de entender si los peces *fueran* optimizadores racionales capaces de seleccionar los genes que han de llevar.

Para que una historia de teoría de juegos se aguante en este contexto, necesitamos una explicación de cómo los genes se distribuyeron exactamente en la forma necesaria para asegurar que cada pez optimizaría, dada la mezcla actual en la población de hogareños y golfos. No basta con decir que la Naturaleza, «con las garras y las fauces llenas de sangre», actuará de forma que sólo quienes se adaptan sobreviven. Esta respuesta rehúye el problema de cómo y por qué resulta que a veces adaptarse implica actuar racionalmente. Esta parece ser una de esas grandes cuestiones que no tienen respuestas fáciles. El Capítulo 9 no hace más que indicar algunas direcciones en las que se podría encontrar la respuesta. Tal vez la investigación actual producirá algo realmente nuevo en esta área. Si fuera así, ¡la teoría de juegos habría dado realmente el salto a la fama!

0.4.4. Aplicaciones a la filosofía social

Actualmente de moda, esta área de aplicación es ciertamente muy divertida. ¿Era realmente el juego llamado el dilema del prisionero (Sección 7.5.4) lo que Thomas Hobbes tenía en la cabeza cuando, en su *Leviathan* de 1654, conceptualizó el estado natural del hombre como la «guerra de todos contra todos» en la que la vida es «solitaria, pobre, desagradable, brutal y corta»? ¿O se estaba refiriendo al juego del gallina? ¿El *imperativo categórico* de Immanuel Kant nos dice que debemos cooperar en el dilema del prisionero, o debería ser considerado únicamente como un criterio para la selección de equilibrios? ¿Estaba Karl Marx refiriéndose a un juego cuando escribió sobre la explotación de la clase obrera? ¿Cómo juega el juego de la caza del ciervo de Jean-Jacques Rousseau la gente real? ¿Es realmente racional usar el principio del maximín en la «posición original», como ha postulado John Rawls en su celebrada *Theory of Justice*?

Soy una persona demasiado irreverente para tener derecho a opinar sobre estas cuestiones tan importantes. Sin embargo, por lo que pueda valer, diré que pienso que las obras de los grandes filósofos son más valiosas por las cuestiones que plantean que por las respuestas que ofrecen. Para ser aún más irreverente, creo que existe una clase entera de cuestiones a las que no podemos esperar que los grandes filósofos del pasado hayan proporcionado respuestas, porque esto supondría por lo menos que habrían anticipado algunas de las ideas que la teoría de juegos ha aportado a la filosofía social moderna.

El filósofo David Hume, sin embargo, es una excepción muy notable a este juicio. Los especialistas en teoría de juegos creen que pueden demostrar formalmente por qué incluso el individuo más egoísta puede descubrir que, con frecuencia, cooperar con sus vecinos en una relación a largo plazo redundará en su propio interés ilustrado. Con este fin estudian los equilibrios de juegos *con repetición* —juegos que los mismos jugadores juegan una y otra vez—. Pocas cosas han descubierto en esta área hasta el presente que hubieran sorprendido a David Hume, quien hace ya unos doscientos años articuló los mecanismos esenciales. Estas ideas, sin embargo, están ahora firmemente basadas en modelos formales. Para avanzar más, habrá que esperar progresos en el problema de la selección de equilibrios en juegos con múltiples equilibrios. Cuando estos progresos se den, sospecho que la filosofía social sin teoría de juegos será algo inconcebible —y que David Hume será universalmente considerado como su verdadero fundador.

0.5. Conclusión

Si ha leído hasta aquí, probablemente ya se ha enganchado. Pero no se trague también el hilo y el plomo. Atienda a lo que dicen éste y otros libros de teoría de juegos y entonces fórmese su propia opinión. Se han escrito

muchas tonterías a propósito de la teoría de juegos, ¿y quién puede decir que este libro no las contiene también? Es cierto, como Bertrand Russell dijo a propósito de la filosofía, que leer teoría de juegos es como leer un cuento de hadas —la incredulidad debe dejarse en suspenso mientras el cuento es contado, si uno quiere enterarse de qué va—. ¡Pero no olvide recuperar la disposición escéptica cuando el cuento se ha acabado!

CAPITULO

1

Ganar

1.1. Introducción

La definición formal de un juego es bastante simple desde un punto de vista matemático, pero no es tan simple entender lo que la definición formal significa. Las ideas necesarias, por tanto, serán introducidas una a una en los capítulos siguientes. En el presente capítulo consideraremos únicamente juegos con dos jugadores, de información perfecta y sin jugadas de azar. Además, nos restringiremos especialmente a la consideración de juegos estrictamente competitivos. Esto significa simplemente que los objetivos de los jugadores son diametralmente opuestos.

Las tres en raya es un ejemplo simple de esta clase de juego. El ajedrez es un ejemplo mucho más complejo. Estos son juegos de información perfecta porque cada vez que un jugador ha de jugar sabe todo lo que podría desear saber sobre lo que hasta ahora ha ocurrido en el juego. El parchís es un juego con dos jugadores, estrictamente competitivo y con jugadas de azar. Lo que un jugador puede hacer cuando le toca jugar depende del lanzamiento de un dado. El póquer es un juego de información imperfecta. En el póquer, cuando hay que decidirse por una apuesta a cualquiera le gustaría saber las manos de los demás jugadores, pero está información le está vedada.

1.2 Las reglas del juego

Las reglas de un juego deben decirnos *quién* puede hacer *qué* y *cuándo* puede hacerlo. También deben indicarnos *cuánto* gana cada uno cuando el juego ha terminado. La estructura utilizada en teoría de juegos para expresar esta información se llama árbol. Un árbol es un caso especial de lo que en matemática combinatoria se llama un grafo. Un grafo, en este sentido, es simplemente un conjunto de nodos (o vértices), algunos de los cuales están conectados por aristas. Un árbol es un grafo conexo y sin ciclos, como se indica en la Figura 1.1.

¿Cuándo? La primera jugada de un juego se identifica con un nodo ~~especialmente~~ marcado del árbol del juego. Éste se suele llamar la *raíz* del ~~árbol~~.

Una partida del juego consiste de una cadena ~~conexa de aristas~~ que empiezan en la raíz del árbol y terminan, si el juego es finito, en un nodo ~~terminal~~. Los nodos terminales del árbol corresponden a los posibles resultados del juego. La Figura 1.2(a) muestra el árbol de un juego *G*. (Nos olvidaremos de la Figura 1.2(b) por el momento.) La raíz del árbol ha sido marcada con la letra *a*. Una partida del juego se ha indicado ensanchando las aristas correspondientes.

¿Qué? Los nodos del árbol representan las jugadas posibles durante el juego. Los segmentos que salen de un nodo representan las acciones o

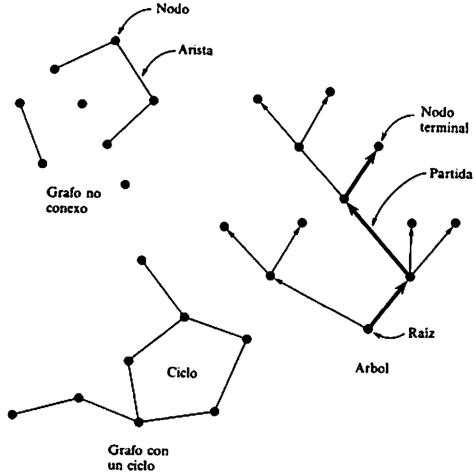


Figura 1.1. Grafos.

elecciones posibles en esa jugada. Así, por ejemplo, hay dos elecciones posibles para la primera jugada en el juego-árbol de la Figura 1.2(a). Han sido marcadas *l* y *r*.

¿Quién? A cada nodo no terminal se le asigna el nombre o número de un jugador, de manera que se sabe quién elige en esa jugada. En el árbol de la Figura 1.2(a), el jugador I es quien elige en la primera jugada. Si él elige *r*, entonces será la jugadora II quien hará la siguiente jugada. Esta tiene tres opciones, llamadas *L*, *M* y *R*. Si elige *R*, el juego se ha terminado. Si elige *L*, tiene que jugar de nuevo.

(Algunos juegos contienen jugadas de azar. Por ejemplo, lo que los jugadores pueden hacer en el parchís depende en la magnitud del número obtenido cuando se tira un dado. Estas situaciones se tratan asignando jugadas a un jugador mítico llamado Azar. Cada acción en una jugada de

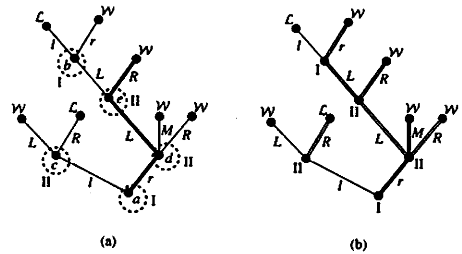


Figura 1.2. El árbol del juego *G*.

Azar se marca con la probabilidad con la que será elegida. Esta cuestión será discutida en el siguiente capítulo.)

¿Cuánto? Cada nodo terminal ha de ser marcado con las consecuencias que tiene para cada jugador que el juego termine con el resultado correspondiente a ese nodo terminal. Por el momento nos limitaremos a considerar ejemplos de juegos que sólo pueden ser ganados o perdidos. En este caso, cada nodo terminal puede ser marcado o bien con $\mathcal{W}$ (para indicar que el jugador I gana y el II pierde), o bien con $\mathcal{L}$ (para indicar que el jugador I pierde y el II gana). El juego *G* de la Figura 1.2(a) es un ejemplo. Daremos por supuesto que ningún jugador está motivado por un deseo perverso de perder. El objetivo de los dos jugadores es ganar el juego, si pueden.

1.2.1. Dos ejemplos

Tres en raya. Todo el mundo sabe cómo jugar a este juego. Su árbol, a pesar de la simplicidad del juego, es muy largo y, por tanto, la Figura 1.3 sólo muestra parte del árbol. Sólo se muestran tres de sus muchos nodos terminales. Se han marcado con las letras $\mathcal{W}$, $\mathcal{L}$ y $\mathcal{D}$ para indicar, respectivamente, que el jugador I gana, pierde o empata.

Nim. Este es un juego simple que se juega ocasionalmente. Al empezar se dispone de varios montones de cerillas. Dos jugadores se alternan en sus jugadas. En cada jugada, el jugador o jugadora correspondiente escoge un montón y retira de él por lo menos una cerilla. El último jugador que retira una cerilla gana. La Figura 1.4 da el árbol del juego cuando éste empieza con tres montones de cerillas, dos de los cuales contienen una cerilla y el

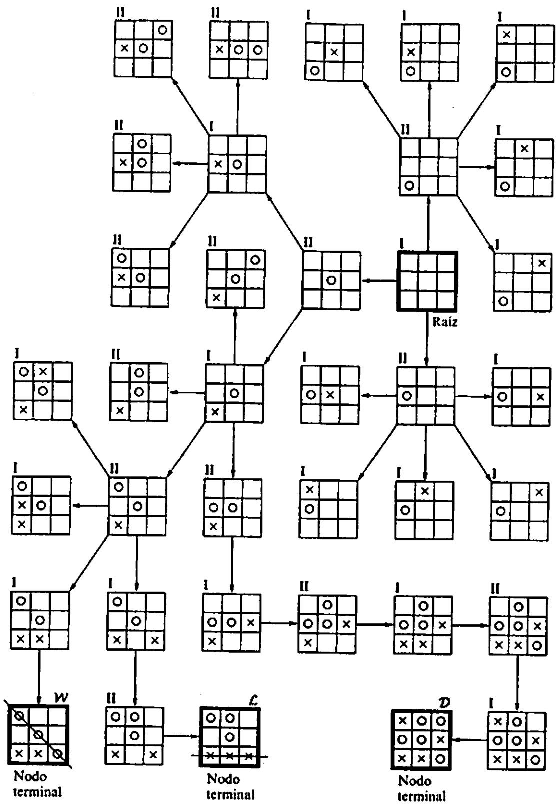


Figura 1.3. Tres en raya.

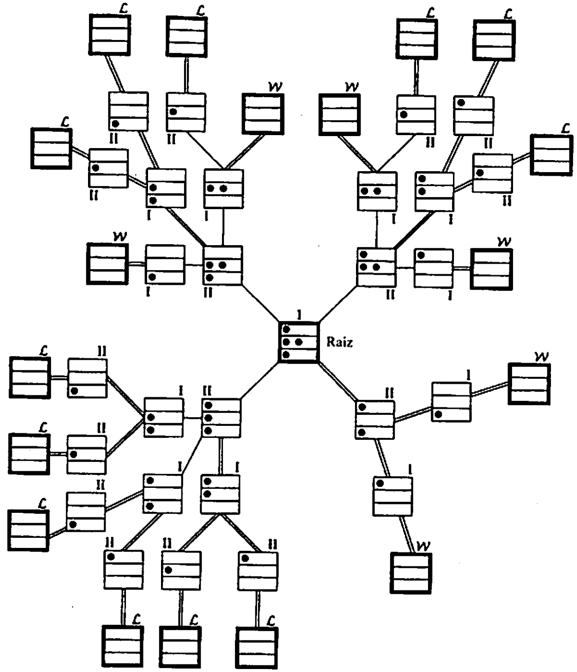


Figura 1.4. El juego del nim.

otro contiene dos cerillas. (Por el momento ignoraremos que algunos de los segmentos del árbol han sido doblados.) Todos los nodos terminales han sido marcados con $\mathcal{W}$ o con $\mathcal{L}$. A diferencia de lo que ocurre en tres en raya, nim no puede terminar en empate. Uno de los dos jugadores ha de ganar. Hasta llegar a la Sección 1.7, donde estudiaremos el ajedrez, sólo consideraremos juegos de este tipo.

1.3. Estrategias

Por ahora sólo discutiremos estrategias *puras*[1]. En los juegos considerados en este capítulo[2], una estrategia pura para el jugador i es un plan que especifica una acción para *cada uno* de los nodos en los que el jugador i debería tomar una decisión, si el nodo fuera alcanzado en realidad. Si todos los jugadores de un juego seleccionan una estrategia pura y se mantienen fieles a ella, entonces el desarrollo de un juego sin jugadas de azar queda totalmente determinado.

Consideremos el juego G de la Figura 1.2(a). Los nodos en los que correspondería al jugador I tomar una decisión están marcados a y b. Por tanto, una estrategia pura para el jugador I debe especificar una acción para el jugador I en el nodo a y una acción para el jugador I en el nodo b. Puesto que se dan 2 acciones posibles para el jugador I en el nodo a y 2 acciones posibles en el nodo b, se sigue que el jugador I dispone de un total de $2 \times 2 = 4$ estrategias puras. Estan se pueden representar como sigue:

$$ll, \quad lr, \quad rl, \quad rr.$$

La estrategia pura representada por lr significa que la acción l será utilizada si se alcanza el nodo a, y que se usará la acción r si se alcanza el nodo b. La estrategia pura rr significa que la acción r ha de ser usada tanto en el nodo a como en el b. (Obsérvese que si el jugador usa la estrategia pura lr, entonces es imposible alcanzar el nodo b, independientemente de lo que haga la jugadora II. Sin embargo, la definición formal de estrategia requiere el especificar una acción para el nodo b aunque la acción especificada en él nunca haya de tener efecto alguno en cómo se desarrolla el juego.)

Los nodos en los que correspondería a la jugadora II tomar una decisión están marcados c, d y e en el juego G de la Figura 1.2(a). Una estrategia pura para la jugadora II, por tanto, deberá especificar una acción para ella en los nodos c, d y e. Puesto que existen 2 acciones posibles para la jugadora II en el nodo c, 3 acciones posibles en el nodo d y 2 acciones posibles en el nodo e, se sigue que la jugadora II dispone de un total de $2 \times 3 \times 2 = 12$ estrategias puras. Estas pueden ser representadas como sigue:

$$LLL, \quad LLR, \quad LML, \quad LMR, \quad LRL, \quad LRR,$$
$$RLL, \quad RLR, \quad RML, \quad RMR, \quad RRL, \quad RRR.$$

[1] Una estrategia *mixta* exige que un jugador randomice entre sus estrategias puras.

[2] En juegos con información incompleta la definición de una estrategia ha de ser modificada y sólo se requiere especificar las acciones a tomar para cada *conjunto de información* sobre el que correspondería al jugador i optar por una opción en el supuesto de que alcanzara este conjunto de información.

	LLL	*LLR*	*LML*	*LMR*	*LRL*	*LRR*	*RLL*	*RLR*	*RML*	*RMR*	*RRL*	*RRR*
ll	W	W	W	W	W	W	L	L	L	L	L	L
lr	W	W	W	W	W	W	L	L	L	L	L	L
rl	L	W	W	W	W	W	L	W	W	W	W	W
rr	W	W	W	W	W	W	W	W	W	W	W	W

Figura 1.5. La forma estratégica del juego G.

La estrategia pura representada por LMR significa que la acción L ha de ser usada si se alcanza el nodo c, que la acción M ha de ser usada si se alcanza el nodo d y que la acción R ha de ser usada si se alcanza el nodo e.

La partida del juego G en la Figura 1.2(a) empieza en el nodo-raíz a cuando el jugador I escoge la acción r. Esta conduce al nodo d, en el que la jugadora II escoge la acción L. Esta a su vez lleva el juego al nodo e, donde la jugadora II escoge la acción R. Con ello el juego es llevado a su fin en el nodo terminal señalado con W, para indicar que gana el jugador I. Una partida así será representada por la serie de acciones $[rLR]$ que la generan. (Los paréntesis cuadrados tienen como finalidad el subrayar que una partida no es en absoluto lo mismo que una estrategia pura.)

¿Cuáles son las estrategias que producen la partida $[rLR]$ de G? El par de estrategias escogidas por los jugadores han de ser de la forma (rx, XL), donde rx representa cualquier estrategia del jugador I en la cual escoge r en el nodo a. Existen 2 estrategias así, rl y rr. Análogamente, XLR representa cualquier estrategia de la jugadora II en la que escoge L en el nodo d y R en el nodo e. Existen 2 estrategias así, LLR y RLR. Luego el número total de pares de estrategias que producen la partida $[rLR]$ es $2 \times 2 = 4$.

La Figura 1.5 muestra la *forma estratégica* del juego G de la Figura 1.2 (a)[3]. La representación en árbol del juego G en la Figura 1.2(a) se llama la *forma extensiva* de G. La forma estratégica indica, para cada par de estrategias, cuál será el resultado del juego si se usa ese par de estrategias. Las filas de la matriz representan las estrategias puras del jugador I, y las columnas las de la jugadora II. La casilla en la fila rl y la columna LLR contienen la letra W. Esto indica que el jugador I ganará el juego si él usa la estrategia pura rl y

[3] La teoría de juegos, como disciplina, empezó con la publicación en 1944 del libro de Von Neumann y Morgenstern *The Theory of Games and Economic Behavior*. El libro empieza discutiendo la *forma extensiva* de un juego, que se basa en la noción de árbol de un juego descrita en la Sección 1.2. A continuación, define la *forma normal* de un juego. Como indica la terminología, Von Neumann y Morgenstern pensaban que el procedimiento «normal» de analizar un juego debía consistir siempre en descartar la forma extensiva en favor de la forma normal. Resulta, sin embargo, que esto sería a menudo poco inteligente. Para indicar este hecho, me uno a los especialistas en teoría de juegos que prefieren hablar de *forma estratégica* de un juego en lugar de de su forma normal. Es necesario tener presente, sin embargo, que la forma normal y la forma estratégica de un juego son exactamente la misma cosa.

la jugadora II usa la estrategia pura LLR. Esto fue comprobado en el párrafo anterior al continuar la partida $[rLR]$ que resultaba de utilizar pares de estrategias de la forma (xr, XLR).

1.4. El algoritmo de Zermelo

Zermelo utilizó este método muchos años atrás, en 1912, para analizar el ajedrez. El método requiere empezar por el final del juego y marchar hacia atrás hasta su principio. Por esta razón esta técnica es llamada a veces «inducción hacia atrás». Esencialmente la misma idea recibe en Investigación Operativa el nombre «programación dinámica». Esta idea realmente simple se puede ilustrar usando el juego G de la Figura 1.2(a). Lo que probaremos es que el jugador I tiene una estrategia para G que le garantiza la victoria sea cual sea de la estrategia que emplee la jugadora II. El método aquí utilizado puede ser aplicado en general a juegos de este tipo.

1.4.1. *Analizando el juego G*

La Figura 1.6 muestra todos los *subjuegos* de G. En el caso de los juegos considerados en este capítulo, cada uno de los nodos x que no es un nodo terminal determina un subjuego[4]. Un subjuego consiste simplemente de un nodo x junto con todo el árbol que viene a continuación. (Obsérvese que la definición incluye al propio G entre sus subjuegos.)

Diremos que el *valor* $v(H)$ de un subjuego H de G es $\mathcal{W}$ si el jugador I dispone de una estrategia para H que le hace ganar H sea cual sea la estrategia que use la jugadora II. Análogamente, diremos que el valor $v(H)$ del subjuego H es $\mathcal{L}$ si la jugadora II dispone de una estrategia que le hace ganar H sea cual sea la estrategia que use el jugador I. Obsérvese que a priori no existe razón alguna por la que alguna de estas dos proposiciones deba ser verdad y, por tanto, sería concebible que un subjuego H no tuviera ningún valor según nuestra definición. Resulta que todos los subjuegos sí tienen de hecho un valor, pero esto es algo que no debería darse por supuesto. (De hecho, es una característica especial de los juegos estrictamente competitivos.)

Consideremos en primer lugar los subjuegos de un jugador G_0 y G_3 de la Figura 1.6. La jugadora II gana G_0 escogiendo la acción R. (Recuérdese que un resultado es marcado $\mathcal{L}$ cuando la jugadora II gana.) Luego $v(G_0) = \mathcal{L}$. Análogamente, el jugador I gana G_3 escogiendo la acción r. Luego $v(G_3) = \mathcal{W}$.

Consideremos ahora el juego G' de la Figura 1.7. Este se ha obtenido a partir de G reemplazando el subjuego G_0 por un nodo terminal marcado

[4] Esto no es cierto para los juegos con información incompleta, como el póquer, en los que hay que utilizar una definición más precisa que toma en consideración lo que la gente sabe, o no sabe, en cada fase del juego.

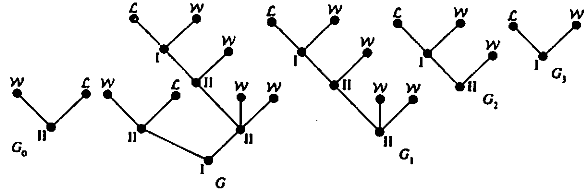


Figura 1.6. El juego G y sus subjuegos.

con el valor $\mathcal{L}$ de G_0, y reemplazando el subjuego G_3 por un nodo terminal marcado con el valor $\mathcal{W}$ de G_3. Si el jugador I tiene una estrategia s' que siempre gana el juego G', entonces tiene una estrategia s que siempre gana G. ¿Por qué es así?

Sea cual sea la estrategia empleada por la jugadora II, el uso por el jugador I de la estrategia s' en G' resultará en una partida de G' que conduce a un nodo terminal x de G' marcado con $\mathcal{W}$. Este nodo terminal x puede que corresponda a un subjuego G_x de G. Si es así, entonces $v(G_x) = \mathcal{W}$. Luego el jugador I tiene una estrategia ganadora s_x en G_x. Se sigue de aquí que el jugador I tiene una estrategia ganadora s para G. Esta consiste en jugar según s' hasta que se llega a uno de los subjuegos G_x, y jugar entonces según s_x.

Un razonamiento muy parecido muestra que si la jugadora II dispone de una estrategia t' que siempre gana en G', entonces dispone de una estrategia t que siempre gana en G. Se sigue que si G' tiene un valor, entonces también lo tiene G y $v(G') = v(G)$.

Consideremos ahora el juego G'' de la Figura 1.8. Este se ha obtenido a partir de G' reemplazando el subjuego G'_2 por un único nodo terminal marcado con el valor $\mathcal{W}$ de G'_2. La razón por la que $v(G'_2) = \mathcal{W}$ es que la jugadora II pierde en el juego de un jugador G'_2 tanto si elije la acción L

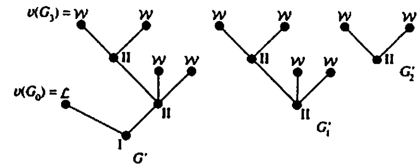


Figura 1.7. El juego G' y sus subjuegos.

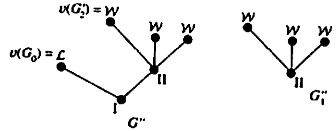


Figura 1.8. *El juego G'' y sus subjuegos.*

como si elige la R. Por el razonamiento utilizado antes, si G'' tiene un valor, también lo tiene G' y $v(G'') = v(G')$.

Finalmente, consideremos el juego G''' de la Figura 1.9. Este se ha obtenido a partir de G'' reemplazando el subjuego G_1'' por un único nodo terminal marcado con el valor de G_1''. Como antes, si G''' tiene un valor, también lo tiene G'' y $v(G''') = v(G'')$.

Ahora bien, G''' es un juego de un jugador que el jugador I puede ganar eligiendo r. Luego G''' tiene un valor y $v(G''') = \mathcal{W}$. Se sigue que G también tiene un valor, y que $v(G) = v(G') = v(G'') = v(G''') = \mathcal{W}$. Luego el jugador I dispone de una estrategia que gana en G sea cual sea la estrategia usada por la jugadora II.

1.4.2. *¿Qué es una estrategia ganadora para G?*

Una manera de hallar una estrategia ganadora para el jugador I en el juego G es descubrirla en la forma estratégica del juego dada en la Figura 1.5. Obsérvese que la fila correspondiente a la estrategia pura rr del jugador I sólo contiene $\mathcal{W}$. Esto significa que si el jugador I emplea la estrategia pura rr, entonces ganará con independencia de la estrategia pura elegida por la jugadora II. Luego, rr es una estrategia ganadora. (En G no hay más estrategias ganadoras para el jugador I, pero con frecuencia los juegos tienen muchas estrategias ganadoras.) Sin embargo, excepto en casos muy sencillos, esta no es una manera razonable de localizar una estrategia ganadora porque la enorme cantidad de trabajo involucrada en la construcción de la forma estratégica hace el método impracticable.

Una manera mejor para encontrar una estrategia ganadora es copiarse el método con el que hemos probado que existe una estrategia ganadora

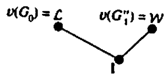


Figura 1.9. El juego G'''.

para G. Empecemos por considerar los menores subjuegos de G (aquellos que no contienen a su vez subjuegos). En cada uno de ellos, doblemos los segmentos que corresponden a elecciones óptimas en el subjuego. Ahora hagamos como si los segmentos no doblados no existieran. Esto produce un nuevo subjuego G^*. Repitamos ahora el proceso con G^*, y continuemos de esta forma hasta que ya no se pueda hacer nada. Al final del proceso existirá por lo menos una partida de G cuyos segmentos han sido todos ellos doblados. Estas son las únicas partidas que hay que seguir, si es conocimiento común entre los jugadores que ambos, siempre y en cualquier circunstancia, intentarán ganar.

Este proceso se ha llevado a cabo para el juego G en la Figura 1.2(b). Sólo una partida del juego tiene todos sus segmentos doblados y conduce a la victoria al jugador I, confirmando así que el jugador I es el que dispone de una estrategia ganadora. Una estrategia pura ganadora puede ser leída directamente en el diagrama eligiendo uno de los segmentos doblados en cada uno de los nodos en los que correspondería al jugador I tomar una decisión, si se llegara a ese nodo. En el caso de G, sólo el segmento r aparece doblado en cada uno de estos nodos. Luego el jugador I sólo tiene una estrategia pura ganadora, que es rr.

1.5. Nim

El proceso que acabamos de describir también se ha llevado a cabo para la versión del nim dada en la Figura 1.4. Obsérvese que, para asegurarse la victoria, el jugador I ha de coger todas las cerillas del montón conteniendo dos. Esto es todo lo que en realidad el jugador I necesita saber. Sin embargo, se puede ver que éste no tiene una *única* estrategia ganadora porque en alguno de los nodos en los que tendría que jugar, si fueran alcanzados, más de un segmento aparece doblado. Se puede ver también que si el jugador I no empleara una estrategia ganadora, no es *seguro* que perdería. Si éste deja de adoptar la acción ganadora en la primera jugada, se llega a un subjuego en el cual la jugadora II dispone de una estrategia ganadora. Pero la jugadora II puede no usar su estrategia ganadora en este subjuego.

Este procedimiento para hallar estrategias ganadoras es fácil de usar cuando se da explícitamente el árbol del juego. Habitualmente, sin embargo, el árbol del juego ha de ser construido a partir de un conjunto de reglas enunciadas verbalmente. Esto puede suponer mucho trabajo. Además, después de construido el árbol puede ser muy grande. Esto es cierto incluso para juegos tan simples como tres en raya o nim (excepto cuando el número de cerillas en cada montón es muy pequeño). Por tanto, debemos buscar métodos menos mecánicos para descubrir cosas acerca de las estrategias ganadoras.

Para el nim existe un método muy elegante que evita la necesidad de construir un árbol del juego. Lo ilustraremos usando la versión del nim

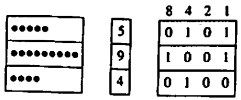


Figura 1.10. Nim con muchas cerillas.

dada en la Figura 1.10. En esta figura el número de cerillas en cada montón se ha expresado primero en el sistema decimal y después en el de base dos[5].

Llamemos *equilibrado* un juego de nim si cada columna de la representación binaria tiene un número par de unos, y *desequilibrado* en caso contrario. El ejemplo de la Figura 1.10 es desequilibrado porque la columna de ochos tiene un número impar de unos. Es fácil verificar que *cualquier* jugada admisible transforma un juego equilibrado en uno desequilibrado[6].

El jugador que juega primero en un juego equilibrado no puede ganar en su primera jugada. La razón es que un juego equilibrado ha de tener cerillas por lo menos en dos montones. Quien juegue, por tanto, no puede recoger inmediatamente la última cerilla porque le está permitido llevarse cerillas sólo de un montón. Se sigue que uno de los jugadores tiene una estrategia ganadora que tiene como característica esencial que una situación desequilibrada ha de convertirse siempre en una situación equilibrada[7]. La razón por la que esta estrategia gana es que asegura que el contrincante no puede ganar en la siguiente jugada. Puesto que esto es cierto en todas las fases del juego, se sigue que el contrincante no puede ganar nunca. Pero alguien debe recoger la última cerilla. Si no es mi contrincante, debo ser yo. Luego debo estar usando una estrategia ganadora.

Obsérvese que el jugador I no siempre dispone de una estrategia ganadora. Si la configuración original de cerillas es desequilibrada, será el jugador I quien dispone de una estrategia ganadora. Pero si la configuración original es equilibrada, entonces será la jugadora II quien dispone de ella.

La Figura 1.11 muestra una partida posible para la versión del nim dada en la Figura 1.10. El jugador I está usando una estrategia ganadora. Merece ser destacado que una vez que el jugador I se enfrenta a sólo dos montones de cerillas con un número igual de cerillas en ambos, entonces puede ganar «robando la estrategia». Todo lo que debe hacer es llevarse tantas cerillas de un montón como la jugadora II se llevó del otro.

[5] Por ejemplo, el número cuya expresión decimal es 9 comprende 1 ocho, 0 cuatros, 0 doses, y 1 uno. Luego su representación en forma binaria es 1001.

[6] Por lo menos un 1 en la representación binaria del montón del que se retiran cerillas pasará a ser necesariamente un 0. Si la columna en lo que esto ocurre tenía $2n$ unos, después tendrá $2n - 1$.

[7] ¿Por qué es esto siempre posible?

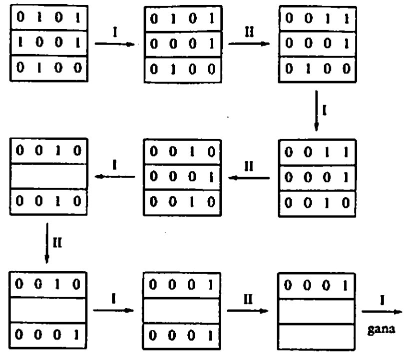
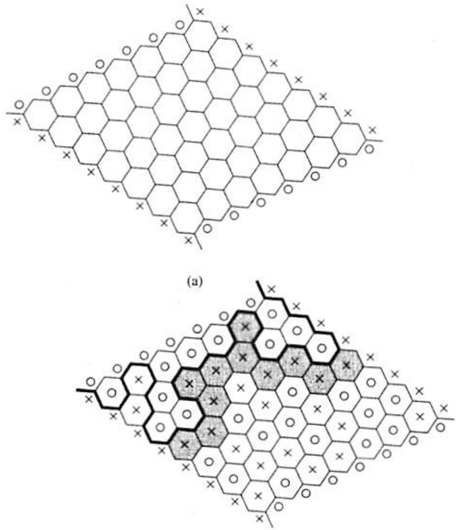


Figura 1.11. El jugador I emplea una estrategia ganadora para el nim.

1.6. Hexágonos

El juego de los hexágonos se juega sobre un tablero que consiste de n^2 hexágonos dispuestos en un paralelogramo como muestra la Figura 1.12(a). Los jugadores juegan alternadamente. Una jugada consiste en marcar en el tablero un hexágono vacante con un círculo (para el jugador I) o una cruz (para la jugadora II). Esto incorpora el hexágono al territorio del jugador que lo marcó. Al principio, el territorio de cada jugador consiste de dos lados opuestos del tablero. El ganador es el primero en unir los dos lados que le corresponden por medio de una cadena continua de hexágonos marcados con su emblema. En el juego que acaba de terminar en la Figura 1.12(b) la ganadora ha sido Cruz. El juego de los hexágonos es interesante por diversas razones. En primer lugar, porque fue investigado por John Nash, de quien hablaremos extensamente más adelante. En segundo lugar, resulta ser importante que el juego no puede terminar en empate, pero una prueba convincente de ello no es trivial. En tercer lugar, aunque los argumentos dados en la Sección 1.4 muestran que uno de los jugadores dispone de una estrategia ganadora para los hexágonos, no se sabe cuáles son las estrategias ganadoras excepto para valores pequeños de n. Sin embargo, es posible probar que de los dos jugadores, el primero en mover es quien debe disponer de una estrategia ganadora.



(a)

(b)

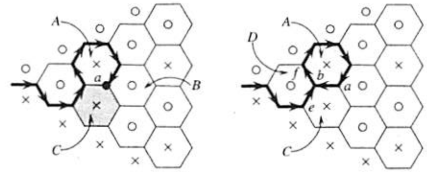
Figura 1.12. Hexágonos.

1.6.1. Por qué los hexágonos no pueden terminar en empate

En cierto sentido es «obvio» que los hexágonos no pueden terminar en empate. Si pensamos que los círculos son agua y las cruces tierra, entonces, cuando *todos* los hexágonos han sido marcados, o bien el agua unirá los dos océanos que pertenecían originalmente al Círculo, o bien el canal quedará taponado. En el primer caso gana el Círculo. En el segundo, gana la Cruz.

Mates 1.7 ⟶

Probar este resultado requiere un razonamiento matemático, como indica la aparición de un Mad Hatter en el margen. La Guía Didáctica explica detalladamente cómo usar estos Mad Hatters para orientarse a través del libro. En el presente caso, el Mad Hatter representa una invitación a saltar directamente a la Sección 1.7, excepto si es usted un entusiasta de las



(a) (b)

Figura 1.13. El algoritmo de Gale para los hexágonos.

matemáticas. Si este libro constituye su primer contacto con la teoría de juegos, debe considerar la posibilidad de simplemente seguir al Mad Hatter a todas partes.

El siguiente algoritmo de David Gale muestra que si todos los hexágonos han sido marcados con un círculo o una cruz, entonces uno de los dos pares de lados opuestos deben estar unidos. Empecemos por una esquina, como se indica en la Figura 1.13(a), y señalemos un camino siguiendo el principio que el siguiente segmento del camino siempre es escogido de manera que un hexágono con círculo se encuentra a uno de sus lados y un hexágono con cruz al otro[8].

Un camino así nunca puede terminar dentro del tablero. Tampoco no puede volver a pasar por un punto que ya ha sido visitado. Los dos diagramas de la Figura 1.13 están pensados para sugerir por qué estas afirmaciones son ciertas.

La Figura 1.13(a) muestra un camino que ha alcanzado el punto a en el interior del tablero. Para llegar a a tiene que haber pasado entre un hexágono con cruz A y uno con círculo B. Tiene que haber un tercer hexágono C del cual a es un vértice. Si tiene una cruz, como en la Figura 1.13(a), entonces el camino puede continuar pasando entre B y C. Si a se encuentra en el borde del tablero, el razonamiento debe modificarse ligeramente, pero continúa valiendo. El razonamiento sólo deja de ser válido si a es uno de los cuatro puntos en las esquinas del tablero. Estos son los únicos puntos en los que el camino puede terminar.

La Figura 1.13(b) muestra un camino que ha vuelto a pasar por un punto b que ya había visitado antes. Para hacer esto, sin embargo, el camino ha tenido que violar el requerimiento de mantener un hexágono con

[8] Esto se hubiera podido hacer volviendo inmediatamente por el camino con el que se llegó, pero se entiende que esto no está permitido.

cruz a un lado y uno con círculo al otro. Para comprobar que un camino nunca puede describir un circuito cerrado sin violar este requerimiento, supongamos que b es el *primer* punto que el camino vuelve a visitar. Para que b hubiera sido visitado la primera vez sería necesario que los tres hexágonos A, C y D con un vértice común en b no pueden estar marcados todos de la misma forma. Supongamos, como en la Figura 1.13(b), que D contiene un círculo y los otros dos hexágonos contienen cruces. Entonces el camino debe haber pasado entre D y C y entre D y A en la primera visita. Puesto que b es el *primer* punto vuelto a visitar del camino, el camino no puede haber llegado a b vía e o f. Debe haber vuelto a b desde a. Pero A y C contienen ambos cruces, luego esto es imposible. Como antes, el razonamiento debe ser modificado ligeramente para los puntos en el borde del tablero, pero también es válido para ellos.

Puesto que el tablero es finito y el camino no puede detenerse ni volver a pasar por donde ya ha pasado, debe terminar en una de las esquinas del tablero distinta de la de salida. Se sigue, como muestra la Figura 1.12(b), que uno de los pares de lados opuestos del tablero debe estar unido. Luego los hexágonos no pueden acabar en tablas.

1.6.2. Por qué el jugador I tiene una estrategia ganadora

La demostración es por reducción al absurdo. La estructura de estas demostraciones puede a veces ser confusa, y por ello empezaremos por delinear la lógica de la demostración. Sea P la proposición que la jugadora II dispone de una estrategia ganadora. Demostraremos que $P \Rightarrow$ (no P)[9]. Entonces, si P fuera verdad, (no P) también sería verdad. Pero es contradictorio que P y (no P) sean ambos ciertos simultáneamente. Por tanto, P no puede ser verdad. Luego (no P) debe ser cierta. Luego el jugador I no dispone de una estrategia ganadora. Pero sabemos por la Sección 1.4 que alguien dispone de una estrategia ganadora. Ya que no es la jugadora II debe ser el jugador I. Luego el jugador I dispone de una estrategia ganadora para los hexágonos.

Para probar que $P \Rightarrow$ (no P) hemos de demostrar que si la jugadora II tiene una estrategia ganadora, entonces el jugador I también debe tener una estrategia ganadora. Nash proporcionó un argumento de los de «robar la estrategia» para probarlo.

Si la jugadora II dispone de una estrategia ganadora, entonces el jugador I puede robársela obedeciendo las siguientes instrucciones:

1. En la primera jugada, escoja un hexágono al azar y márquelo con un círculo.

[9] La notación $P \Rightarrow Q$ significa que P implica Q. Esto es, si P es verdad, entonces Q es verdad.

2. En cualquier jugada posterior, haga como si el último hexágono que marcó con un círculo no estuviera marcado. A continuación haga como si todos los restantes hexágonos con círculos contuvieran cruces, y como si los hexágonos con cruces contuvieran círculos. Ahora se ha colocado usted en la posición en la que se aplica la estrategia ganadora de la jugadora II. Elija el hexágono que la jugadora II escogería en esta posición si quisiera utilizar su estrategia ganadora. Márquelo con un círculo. El único contratiempo posible es que este hexágono sea el que usted está tomando como no marcado. Si es así, entonces no tiene que robarle al jugador II la jugada ganadora para esta posición porque ya se la ha robado. Le basta con escoger al azar un hexágono y marcarlo con un círculo.

Esta estrategia debe hacer ganar al jugador I porque éste está haciendo simplemente lo que supuestamente asegura una victoria al jugador II. Y no sólo esto, sino que lo está haciendo una jugada antes de lo que lo haría la jugadora II. El hecho de que tiene un hexágono extra marcado con su emblema no le hace daño alguno. Al contrario, su presencia le puede servir para obtener la victoria antes de lo que hubiera sido de esperar.

1.7. Ajedrez

Excepto las tres en raya, los juegos considerados hasta ahora terminan necesariamente con la victoria de uno de los dos jugadores. El ajedrez, sin embargo, puede terminar de tres maneras posibles. A la posibilidad de que Blancas ganen o pierdan tenemos que añadir la posibilidad de que el juego termine en tablas. Representaremos estas tres posibilidades por $\mathcal{W}$, $\mathcal{L}$ y $\mathcal{D}$, respectivamente. Las preferencias del jugador I sobre estos resultados se indican escribiendo

$$\mathcal{L} \prec_1 \mathcal{D} \prec_1 \mathcal{W}.$$

Las preferencias de la jugadora II viene dadas por

$$\mathcal{L} \succ_2 \mathcal{D} \succ_2 \mathcal{W}.$$

En general, la notación $a \preceq_i b$ significa que al jugador i le gusta el resultado b por lo menos tanto como el a. La notación $a \prec_i b$ significa que el jugador i prefiere b a a estrictamente. Es decir, que nunca elegirá a cuando pueda elegir b. La notación $a \sim_i b$ significa que el jugador i es indiferente entre a y b. Escribir $a \preceq_i b$ es, pues, equivalente a decir que o bien $a \prec_i b$ o bien $a \sim_i b$.

Las propiedades de estas relaciones de preferencia serán discutidas en detalle en el Capítulo 3. Por el momento bastará con observar que las preferencias atribuidas a los jugadores I y II hacen del ajedrez un juego *estrictamente competitivo*. En términos de relaciones de preferencia esto significa que, para cualesquiera resultados a y b[10],

$$a \prec_1 b \Leftrightarrow b \prec_2 a.$$

Mates 1.7.1→

Los objetivos de los jugadores son diametralmente opuestos. Todo lo que es bueno para uno es malo para el otro.

El principal resultado de esta sección es que el ajedrez tiene un valor. Esto se deducirá de un teorema más general cuya prueba se reduce a poca cosa más que a dejar presentable la exposición del algoritmo de Zermelo dada en la Sección 1.4. En el enunciado del teorema, la afirmación de que el jugador I puede *forzar* un resultado en un conjunto S significa que el jugador I tiene una estrategia que garantiza que el resultado se encontrará en el conjunto S sea cual sea la estrategia usada por su oponente. Usaremos la notación $\sim S$ para el *complementario* del conjunto S[11]. En el teorema, por ejemplo, $\sim T$ consiste de todos los resultados que no están en el conjunto T.

Torema 1.7.1 (Zermelo). Sea T un conjunto cualquiera de resultados de un juego finito de dos jugadores, de información perfecta y sin jugadas de azar[12]. Entonces, o bien el juagador I puede forzar un resultado en T o la jugadora II puede forzar un ressultado en $\sim T$.

Demostración. Marquemos todos los resultados de T con la letra $\mathcal{W}$ y todos los resultados de $\sim T$ con la letra $\mathcal{L}$. En el resto de la demostración podemos restringir nuestra atención a juegos finitos con dos jugadores cuyos nodos terminales están marcados todos con $\mathcal{W}$ o con $\mathcal{L}$. Como en la Sección 1.4, definamos el valor $v(H)$ de un juego H de este tipo como $\mathcal{W}$ si el jugador I puede forzar una victoria en H, y como $\mathcal{L}$ si la jugadora II puede forzar una victoria en H. El teorema quedará probado si se puede demostrar que cualquier H del tipo aquí estudiado tiene un valor. Evidentemente el

---

[10] La notación $P \Leftrightarrow Q$ significa que P es verdad si y sólo si Q es verdad. Esto es, $P \Leftrightarrow Q$ significa que tanto $P \Rightarrow Q$ como $Q \Rightarrow P$ son verdad. Para expresar que $P \Rightarrow Q$ se puede decir que P es una condición suficiente para Q. Análogamente, $Q \Rightarrow P$ significa que P es una condición necesaria para Q. Luego $P \Leftrightarrow Q$ se puede traducir por P es una condición necesaria y suficiente para Q.

[11] La notación $x \in S$ significa que x es un elemento (o un miembro) del conjunto S. La notación $x \notin S$ significa que x no es un elemento de S. El complementario $\sim S$ de un conjunto S se puede definir simbólicamente como $\sim S = \{x : x \notin S\}$. Para que la definición tenga sentido, es necesario conocer previamente el dominio de la variable x. En el texto, el dominio se entiende que es el conjunto U de todos los resultados del juego estudiado.

[12] Esto simplemente significa que el árbol del juego tiene un número finito de nodos.

razonamiento de la Sección 1.4 se puede utilizar para este propósito. Sin embargo, dado que queremos que esto sea la prueba formal de un teorema, el razonamiento debería ser presentado con un grado razonable de precisión.

Sea el rango de un juego el número de segmentos en la partida más larga de todas las posibles. Es ciertamente verdad que cualquier juego de rango 1 tiene un valor. Un juego así consiste de una raíz y algunos nodos terminales. Si al jugador I le toca escoger en la raíz, entonces puede ganar inmediatamente si alguno de los nodos terminales está marcado $\mathcal{W}$. En caso contrario, todos los nodos terminales están marcados con una $\mathcal{L}$ y, por tanto, la jugadora II puede forzar una victoria sin hacer nada en absoluto. Un razonamiento análogo muestra que un juego de rango 1 tiene un valor si la jugadora II es quien debe escoger en la raíz.

Supongamos ahora que para algún valor de n todos los juegos de rango n tienen un valor. Demostraremos que en este caso todos los juegos de rango $n + 1$ también han de tener un valor.

Sea G un juego de rango $n + 1$. Localicemos el último nodo no terminal x en cada partida de G de longitud $n + 1$. Construyamos un nuevo juego G' suprimiendo en G todo lo que viene a continuación de cada uno de estos nodos x. Así, los nodos x se convierten en nodos terminales de G'. Marquemos cada uno de estos nodos terminales con el valor $v(G_x)$ del subjuego G_x cuya raíz es x. Estos subjuegos son de rango 1 y, por tanto, tienen un valor.

Puesto que el juego G' es de rango n, tiene un valor. Supongamos que es el jugador I quien dispone de una estrategia s' que gana el juego G' contra cualquier estrategia que pudiera usar la jugadora II. El uso de s' asegura que G' terminará en uno de los nodos terminales de G' marcados con $\mathcal{W}$. Si este nodo terminal corresponde a un subjuego G_x de G, entonces $v(G_x) = \mathcal{W}$ y el jugador I tiene una estrategia ganadora s_x en G_x. El jugador I puede forzar una victoria en G jugando s' en G' y s_x en cada subjuego G_x en el que dispone de una estrategia ganadora. El mismo razonamiento se aplica cuando es la jugadora II quien tiene una estrategia ganadora en G'. Luego uno de los jugadores puede forzar una victoria en G, y G tiene un valor.

Hemos demostrado que los juegos de rango 1 tienen un valor. También hemos demostrado que si todos los juegos de rango n tienen un valor, *entonces* también lo tienen todos los juegos de rango $n + 1$. De aquí se deduce que *todos* los juegos tienen un valor. Para ver que es así, empecemos tomando $n = 1$. Puesto que juegos de rango 1 tienen un valor, podemos deducir que juegos de rango 2 tienen un valor. Ahora tomemos $n = 2$. Esto nos permite deducir que juegos de rango 3 tienen un valor. Esto nos permite deducir que juegos de rango 4 tienen un valor, y así sucesivamente[13].

---

[13] El enunciado general de este tipo de razonamiento se llama el *principio de inducción*. Este afirma que si $P(n)$ es una proposición definida para cada $n = 1, 2, \ldots$ y si

1. $P(1)$ es verdad;
2. Para cada n, es verdad que $P(n) \Rightarrow P(n+1)$;

entonces $P(n)$ es verdad para todos los valores de n.

Hemos demostrado que todos los juegos que estamos considerando tienen un valor. Luego, o bien el jugador I puede forzar un resultado en T, o bien la jugadora II puede forzar un resultado en $\sim T$. □

1.7.1. Valores de juegos estrictamente competitivos

Mates

Observemos en primer lugar que un Mad Hatter ha aparecido en el margen. La Guía didáctica explica detalladamente lo que significa su aparición. Habitualmente aparece corriendo hacia otra sección, y los principiantes harían bien en seguirle. Aquí *no* está corriendo, aunque parece que no le falten ganas. Esto significa que nos vamos a encontrar con algo un poco más difícil de lo habitual, pero que debemos resistir la tentación de echar a correr.

Diremos que un resultado v es un valor de un juego finito y estrictamente competitivo G si y sólo si el jugador I puede forzar un resultado en el conjunto $W_v = \{u : u \succeq_1 v\}$ y la jugadora II puede forzar un resultado en el conjunto $L_v = \{u : u \succeq_2 v\}$. Sin pérdida de generalidad, en lo que sigue supondremos que el jugador I no es indiferente entre ningún par de resultados de G. Así, los resultados en el conjunto $U = \{u_1, u_2, ..., u_k\}$ de todos los posibles resultados de G pueden ser representados de forma que

$$u_1 \prec_1 u_2 \prec_1 \cdots \prec_1 u_k.$$

Entonces las preferencias de la jugadora II satisfacen $u_1 \succ_2 u_2 \succ_2 \cdots \succ_2 u_k$. La Figura 1.14 ilustra lo que significa para estos juegos tener un valor v.

Corolario 1.7.1. Todos los juegos finitos, estrictamente competitivos, de información perfecta y sin jugadas de azar tienen un valor.

Demostración. El jugador I puede ciertamente forzar un resultado en el conjunto W_{u_1} porque éste contiene todos los resultados del juego. Cietamente no puede forzar un resultado en un conjunto menor que W_{u_k} porque este conjunto sólo contiene el único elemento u_k. Luego existe un conjunto *mínimo* W_v en el que el jugador I puede forzar que se dé el resultado. Ahora, si $v = u_j$, el jugador I *no puede* forzar que el resultado se dé en $W_{u_{j+1}}$. Según

La jugadora II puede forzar un resultado aquí

u_1	u_2	...	$v = u_j$	u_{j+1}	...	u_k

El jugador I puede forzar un resultado aquí

Figura 1.14. El valor v de un juego estrictamente competitivo.

el teorema de Zermelo se sigue que la jugadora II puede forzar un resultado en $\sim W_{u_{j+1}} = L_v$. Esto completa la demostración. □

Corolario 1.7.2. El ajedrez tiene un valor.

Demostración. Se deduce inmediatamente del Corolario 1.7.1. □

1.7.2. Puntos de silla

Diremos que un par de estrategias (s, t) es un punto de silla de la forma estratégica de un juego estrictamente competitivo si, desde el punto de vista del jugador I, el resultado v que se deriva de usar (s, t) no es peor que ninguno de los resultados de la columna correspondiente a t, y no es mejor que ninguno de los de la fila correspondiente a s.

Corolario 1.7.3. La forma estratégica de un juego finito, estrictamente competitivo, de información perfecta y sin jugadas de azar tiene un punto de silla (s, t).

Demostración. Supongamos que el juego tiene el valor v. Sea s una estrategia que asegura al jugador I un resultado $u \succeq_1 v$. Ninguna de las entradas en la fila s de la forma estratégica puede ser peor que v para el jugador I. Sea t una estrategia que asegura a la jugadora II un resultado $u \succeq_2 v$. Ninguna de las entradas en la columna t puede ser peor que v para la jugadora II. Puesto que el juego es estrictamente competitivo, cada entrada en la columna t no es mejor que v para el jugador I. Por tanto, el resultado actual de jugar (s, t) no puede ser peor ni mejor que v para el jugador I. Puesto que en esta sección suponemos que los jugadores no son indiferentes respecto a los resultados, se sigue que el resultado de jugar (s, t) debe ser v. De aquí se sigue el corolario. □

Un recíproco de este resultado nos será útil.

Teorema 1.7.2. Supongamos que la forma estratégica de un juego estrictamente competitivo G tiene un punto de silla (s, t) para el cual el resultado correspondiente es v. Entonces G tiene valor v.

Demostración. Puesto que v es el peor resultado de su fila para el jugador I, éste puede forzar para él un resultado por lo menos tan bueno como v jugando s. Puesto que v es el mejor resultado de su columna para el jugador I, es el peor de su columna para la jugadora II. Luego la jugadora II puede forzar para ella un resultado por lo menos tan bueno como v jugando t. □

Estos resultados son ilustrados en la Figura 1.15, que contiene una forma estratégica imaginaria del ajedrez. El ajedrez es tan complicado que

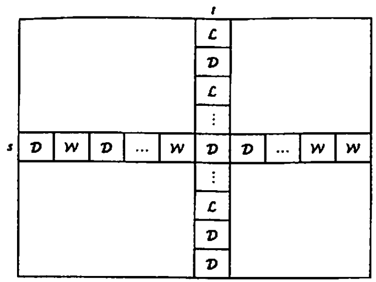


Figura 1.15. La forma estratégica del ajedrez.

tal vez su valor real v no será conocido jamás. Si $v = \mathcal{W}$, entonces las Blancas pueden forzar la victoria. Si $v = \mathcal{L}$, entonces las Negras pueden forzar la victoria. Si $v = \mathcal{D}$, entonces ambos jugadores pueden forzar tablas. La Figura 1.15 ha sido realizada suponiendo que esta tercera posibilidad era la correcta. La estrategia s representa una estrategia pura que asegura tablas o un resultado mejor para el jugador I, y t representa una estrategia pura que asegura tablas o un resultado mejor para la jugadora II. Por el Corolario 1.7.3, el par (s, t) es un punto de silla de la forma estratégica del ajedrez.

1.8. ¿Juego racional?

¿Qué consejo debería dar un libro de teoría de juegos a cada uno de los dos jugadores que van a empezar a jugar un juego G estrictamente competitivo de información perfecta sin jugadas de azar? Si el juego tiene valor v, la respuesta puede parecer fácil. Con seguridad cada jugador debería simplemente escoger estrategias puras que le aseguran un resultado no peor que v. Si un par así de estrategias puras (s, t) es utilizado, entonces el resultado del juego será v[14]. Pero debemos llevar cuidado al aceptar el par (s, t) como una solución del juego. El resto de esta sección se dedicará a discutir algunas de las cuestiones relevantes a este respecto.

[14] Suponiendo, como en la sección precedente, que los jugadores no son indiferentes entre ninguno de los resultados. Si son a veces indiferentes entre dos resultados, entonces el resultado de jugar (s, t) podría ser un resultado w que no es v, pero que ambos jugadores consideran equivalente a v.

1.8.1. Equilibrios de Nash

El par (s, t) ciertamente satisface uno de los criterios que debe ser satisfecho para que en general un libro de teoría de juegos lo adopte como solución de un juego. El criterio es que (s, t) sea un *equilibrio de Nash*. Esto simplemente significa que s debe ser una elección óptima para un jugador I que sabe que que la jugadora II elegirá t; simultáneamente, t debe ser una elección óptima para una jugadora II que sabe que el jugador I elegirá s. En otras palabras, cada una de las estrategias puras del par (s, t) debe ser una respuesta óptima a la otra.

En un juego estrictamente competitivo la condición para que un par (s, t) sea un equilibrio de Nash es que sea un punto de silla de la forma estratégica del juego. El que v sea el mejor de su fila hace que s sea una respuesta óptima para el jugador I. En un juego esrictamente competitivo, si v es el peor de su fila para el jugador I, entonces debe ser el mejor de su fila para la jugadora II. Luego t es una respuesta óptima a s para la jugadora II.

Consideremos, por ejemplo, la forma estratégica de la Figura 1.5. Esta tiene muchos equilibrios de Nash. Todos los pares de estrategias puras en los que el jugador I usa rr son equilibrios de Nash. Es decir, todos los resultados de la fila inferior de la matriz corresponden a puntos de silla.

Sería contradictorio que un especialista en teoría de juegos recomendara a cada jugador algo que no fuera un equilibrio de Nash. Si la recomendación fuera adoptada de forma general, entonces la manera de jugar el juego sería conocimiento común. Pero si se sabe que cualquier jugadora II llevará a la práctica el consejo del libro y jugará t, entonces ningún jugador racional I llevará a la práctica el consejo del libro de jugar s, excepto si s es una respuesta óptima a t. Análogamente, si se sabe que todo jugador I llevará a la práctica el consejo del libro y jugará s, entonces ninguna jugadora racional II llevará a la práctica el consejo del libro de jugar t, excepto si t es una respuesta óptima a s.

1.8.2. Equilibrio subjuego-perfecto

En la forma estratégica de la Figura 1.5, (rr, LLL) es un equilibrio de Nash. Sin embargo no es un par de estrategias que serían seleccionadas por un algoritmo de Zermelo. Como sabemos por la Sección 1.4, el algoritmo de Zermelo siempre escoge rr para el jugador I. Las estrategias puras que escoge para la jugadora II se pueden observar en la Figura 1.2(b). Corresponden a segmentos que aparecen doblados en este diagrama. Es decir, son estrategias puras de la forma RXY. La estrategia pura LLL no es una de ellas.

La razón por la que el algoritmo de Zermelo no selecciona LLL es que esta estrategia pura exige que la jugadora II se plantee realizar la elección *irracional* de L en el nodo c. Se dice que la elección es irracional porque si el nodo c *fuera* alcanzado, entonces la jugadora II ganaría jugando R, mientras que jugando L se ve llevada a la derrota. La definición de equilibrio de Nash no detecta que la estrategia *LLL* incorpora este plan irracional porque si el jugador I usa su estrategia de equilibrio de Nash, *rr*, el nodo *c* no será alcanzado. Luego la jugadora II nunca necesitará utilizar su plan irracional para el nodo *c*. Lo importante aquí es que el restringir la atención a estrategias de equilibrio de Nash sólo asegura que los jugadores se conducirán racionalmente en los nodos que se encuentran *en la trayectoria de equilibrio*. Esta coincide con la partida del juego seguida cuando se usan las estrategias del equilibrio. Fuera de la trayectoria de equilibrio, las estrategias de equilibrio de Nash pueden conducir a toda suerte de conductas alocadas.

Consideremos, por ejemplo, el juego del ajedrez. Si el valor del ajedrez es $\mathcal{D}$, entonces el jugador I puede asegurarse unas tablas o un resultado mejor jugando una estrategia pura s. Pero no puede conseguir nada mejor si la jugadora II usa una estrategia pura t que le asegura tablas o un resultado mejor. Sin embargo, la jugadora II podría cometer un error momentáneo que conduciría a un subjuego que no habría sido alcanzado si la jugadora II no se hubiera desviado de t por error. El uso de la estrategia s continúa garantizando unas tablas o un resultado mejor al jugador I, porque s garantiza un resultado así tanto si la jugadora II juega bien como si juega mal. Sin embargo, si la jugadora II ha cometido un error, el jugador I puede tal vez conseguir algo más que forzar unas tablas. En el subjuego alcanzado como consecuencia del disparate de la jugadora II puede que el jugador I disponga de una estrategia ganadora. Si es así, éste tal vez no esté interesado en mantenerse fiel a la estrategia pura s. Si s sólo asegura tablas en el subjuego, pero existe otra estrategia s' que asegura la victoria, entonces el jugador I querrá pasarse de s a s'.

Es obvio, por tanto, que un especialista en teoría de juegos no estaría a la altura de su cometido si se contentará con recomendar *cualquier* equilibrio de Nash del ajedrez como solución para este juego. Un especialista debe proporcionar consejos más refinados. En particular, los pares de estrategias (s, t) seleccionados por el algoritmo de Zermelo no sólo son equilibrios de Nash en todo el juego: también inducen equilibrios de Nash en *cada* subjuego. Siguiendo a Reinhard Selten diremos que un par de estrategias con esta propiedad es un *equilibrio subjuego-perfecto*.

1.8.3. Explotando el mal juego

Filo 1.9 ⟶

¿Sería prudente por parte de un teórico de juegos recomendar como la solución al ajedrez un equilibrio subjuego-perfecto? Considérese el ejemplo de la Figura 1.16, que se parece al ajedrez en la medida que los jugadores I y II alternan sus movimientos; los símbolos $\mathcal{W}$, $\mathcal{L}$ o $\mathcal{D}$ representan una victoria, empate o derrota del jugador I. Pero, al contrario que en el ajedrez, se supone que a los jugadores les importa la duración del juego. Las preferencias de I vienen dadas por

$$\mathcal{W}_1 \succ_1 \mathcal{W}_2 \succ_1 \cdots \succ_1 \mathcal{W}_{101} \succ_1 \mathcal{D}_{50} \succ_1 \mathcal{L}_{52}.$$

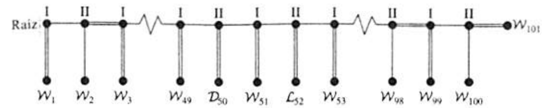


Figura 1.16. Un juego tipo ajedrez.

Se supone que las preferencias de II son las opuestas. Las dobles rayas en la Figura 1.16 muestran el resultado de aplicar el algoritmo de Zermelo.

Puesto que sólo una raya es doble en cada nudo, hay un único equilibrio subjuego-perfecto. Ello implica que la jugadora II juega «bajar» en el nudo 50. ¿Es éste un buen consejo? La respuesta es que todo depende de lo que se sepa sobre el oponente. Es un buen consejo si la jugadora II está tan segura de que el jugador I es racional que ninguna evidencia contraria puede cambiar su opinión. Un jugador I racional ciertamente jugaría «bajar», si se encontrara en el nudo 51, puesto que ello le llevaría a una inmediata victoria. Por tanto, la jugadora II no debería permitir que se llegara al nudo 51. Debería aceptar un empate jugando «bajar» en el nudo 50.

Pero para que el juego llegue al nudo 50, el jugador I tiene que haber jugado «cruzar» en 25 ocasiones consecutivas, cuando lo racional era jugar «bajar». Esta evidencia no es consistente con la hipótesis de la jugadora II de que el jugador I es racional. Aquella podría argumentar, no obstante, que incluso los jugadores que son casi siempre racionales cometen errores a veces. Si es así, puede atribuir el comportamiento de I al jugar siempre «cruzar» a 25 errores consecutivos. En cada uno de estos casos, ella podría argumentar, él *quería* jugar «bajar», pero el destino intervino torciendo su codo o distrayendo su atención en el momento crucial, de modo que acabó jugando «cruzar». No tendrá ninguna duda de que hay que atribuir una probabilidad muy pequeña p a cada uno de estos errores y, por tanto, la probabilidad p^{25} de que sucedan los 25 errores es un número increíblemente pequeño[15]. A pesar de todo, es logicamente coherente que, ante la alternativa de que ha sucedido algo tan improbable y la hipótesis de que es altamente probable que el oponente se comportará racionalmente en el futuro (aunque no haya sido así en el pasado), la jugadora II crea en la primera posibilidad.

Evidentemente, en la vida real nadie está tan convencido de la racionalidad de un oponente. En particular, nadie que intente explicar el comportamiento de un oponente que ha hecho 25 malas jugadas consecutivas en el ajedrez creerá plausible que en realidad, en todos los casos, intentó jugar bien pero inadvertidamente movió la ficha equivocada. La conclusión que

[15] Si se da menos de una posibilidad por cada diez de cometer un error, entonces se da menos de una posibilidad por cada mil millones de mil millones de mil millones de cometer 25 errores de estos.

surge naturalmente al observar mal juego es que el oponente es un mal jugador. La cuestión entonces es cómo aprovecharse de su debilidad[16].

En el juego de la Figura 1.16 la debilidad del jugador I parece consistir en una fijación por jugar «cruzar» pase lo que pase. Una jugadora II que en el nudo 50 piense que esta explicación del comportamiento de I es muy probable puede arriesgarse a jugar «cruzar». El riesgo consiste en que I puede desviarse de la norma de su comportamiento en el pasado y jugar «bajar» en el nudo 51. En este caso II ha perdido inútilmente la oportunidad de un empate. Pero si el jugador I sigue jugando «cruzar» en el nudo 51, entonces II puede conseguir la victoria jugando «bajar» en el nudo 52.

Lo importante en todo esto es que la teoría de juegos no pretende decirnos cómo medir las debilidades de un oponente. Para este tipo de juicios el consejo de un psicólogo sería mejor que el de un especialista en teoría de juegos. La teoría de juegos trata de lo que los jugadores harán cuando se sobreentiende que ambos son racionales en algún sentido. A veces, como en el caso de juego tipo ajedrez de la Figura 1.16, ello significa que un análisis ortodoxo según la teoría de juegos no es necesariamente una buena guía de cómo jugar contra personas reales. Quizá esto sea también verdad de los juegos que la gente juega básicamente para divertirse. Ver a dos personas jugar al póquer óptimamente sería tan interesante como mirar cómo se seca la pintura: y nadie jugaría nunca al ajedrez, si se supiera como jugarlo óptimamente.

¿Significa esto que la teoría de juegos es inútil? Evidentemente si lo creyera no me dedicaría a ella. Pero es verdad que a menos que tengamos razones de peso para pensar que la gente involucrada va a comportarse racionalmente, la teoría de juegos no puede usarse de forma ingenua para predecir lo que la gente real va a hacer. En consecuencia, en muchos casos sería poco inteligente usar la estrategia que un libro de teoría de juegos etiquetara de «óptima», puesto que sería óptima sólo si *todos* los jugadores pensaran jugar óptimamente. Evidentemente hay circunstancias en las que si es razonable trabajar bajo la hipótesis de que la gente se comportará de una forma razonablemente racional. La Econonía se fundamenta, de forma no muy sólida, en el supuesto de que en las relaciones comerciales y de negocios se da típicamente este caso. No obstante, si no se cumpliera ninguno de los siguientes criterios, usar la teoría de juegos para hacer predicciones sería como jugar con fuego:

- El juego es simple.
- Los jugadores han jugado el juego muchas veces en el pasado, y en consecuencia han tenido muchas oportunidades de aprender por tanteo[17].
- Los incentivos para jugar bien son los adecuados.

[16] En general uno se arriesga al hacer esto. El oponente podría ser, concebiblemente, un timador que está preparando el terreno para un golpe. sin embargo, esto no es posible en el juego de la Figura 1.16. No hay ventaja de ningún tipo que el jugador I pueda ganar al jugar «cruzar» 25 veces seguidas, cuando en cada ocasión puede ganar directamente con sólo jugar «bajar».

El segundo y tercer criterios se satisfacen, por ejemplo, cuando jugadores expertos juegan al póquer en el «Campeonato Mundial de Póquer». Además, aunque el póquer no es tan simple como las tres en raya o el nim, es simple comparado con el ajedrez. Esto es, puede ser analizado con éxito. Por tanto, el primer criterio también se satisface en algún grado. Por tanto, es esperanzador que la forma en que se juega en estos campeonatos se parece mucho más a lo que predice la teoría de juegos que a la que observamos en timbas de café[18]. De todos modos, incluso cuando se satisfacen los tres criterios, las predicciones de la teoría de juegos sólo con mucha prudencia pueden ser aplicadas a situaciones reales.

1.9. Conflicto y cooperación

Filo 1.10 ⟶

Por ahora este capítulo se ha ocupado de juegos estrictamente competitivos en los que lo que es bueno para un jugador es malo para el otro. La teoría de estos juegos está mucho más desarrollada que la teoría de juegos en general. En consecuencia, los libros de teoría de juegos tendían a concentrarse en estos juegos hasta hace relativamente poco tiempo. En el pasado esto ha llevado a algunos críticos a concluir que la teoría de juegos sólo se ocupa de juegos estrictamente competitivos. Si esta conclusión fuera correcta, con toda seguridad tendrían razón al rechazar la teoría de juegos como algo que tiene muy poco interés práctico. Se da raramente el caso en la vida real en el que los juegos que tenemos que jugar no ofrecen oportunidades de algún tipo para cooperar con los demás jugadores.

Es típico de los juegos de la vida real que ofrezcan oportunidades tanto para la cooperación como para el conflicto, y muchas de las cuestiones realmente interesantes son las que se refieren a cuándo es, o no es, racional cooperar con otros jugadores racionales. La consideración detallada de estas cuestiones, sin embargo, la pospondremos hasta el Capítulo 5, que se ocupa de algunos juegos de negociación. En contraste con lo que ocurre en juegos estrictamente competitivos, en estos juegos de negociación siempre es racional que los jugadores cooperen y lleguen a un acuerdo. Sin embargo, estos juegos no dejan de carecer de motivos de conflicto porque las opiniones de los jugadores sobre qué acuerdo debe alcanzarse no coinciden necesariamente.

[17] Han jugado contra distintos adversarios en cada ocasión. Si se trata de jugar un determinado juego contra el mismo oponente muchas veces, esta situación de repetición exige construir un modelo en términos de un único «super-juego».

[18] Por ejemplo, la teoría de juegos recomienda echarse muchos faroles cuando las manos son muy malas.

En la presente sección nos limitaremos a considerar algunos ejemplos simples de juegos que no son estrictamente competitivos. Han sido escogidos principalmente para hacer ver que la mayoría de las interesantes propiedades que tienen los juegos estrictamente competitivos estudiados en este capítulo no se cumplen en juegos más generales. En cada ejemplo los resultados serán representados por un par de cantidades en dólares ($\$x$, $\$y$). La interpretación es que si el juego termina en un resultado representado por ($\$x$, $\$y$) , entonces el jugador I recibe x dólares y la jugadora II recibe y dólares. Suponemos que cada jugador o jugadora prefiere más dinero que menos y que en el juego no le preocupa otra cosa que cuánto dinero ganará al final. En los diagramas, el resultado ($\$x$, $\$y$) será representado por un cuadrado con el pago, x dólares, del jugador I en la esquina suroeste y con el pago, y dólares, de la jugadora II en la esquina noreste.

1.9.1. Un juego en equipo

Un juego en equipo es lo más distinto que se puede concebir de un juego estrictamente competitivo. En los juegos en equipo los intereses de los jugadores coinciden. Lo que es bueno para un jugador también es bueno para los otros. La Figura 1.17(a) proporciona un ejemplo muy simple. El algoritmo de Zermelo le ha sido aplicado, doblando los segmentos apropiados. Se da un único equilibrio subjuego-perfecto, (l, L), que conduce al resultado ($2, $2). En la forma estratégica dada en la Figura 1.17(b) se puede comprobar que éste es un equilibrio de Nash observando que el pago de 2 dólares del jugador I es el mayor de sus pagos en la columna correspondiente a L. Luego l es una respuesta óptima a L. Al mismo tiempo, 2 dólares es el mayor de los pagos de la jugadora II en la fila que corresponde a l. Luego L es una respuesta óptima a l.

Los juegos en equipo de información perfecta no son muy interesantes porque de hecho pueden ser analizados como juegos de un solo jugador[19]. El presente ejemplo, sin embargo, servirá para subrayar un punto importante: que juegos que no son estrictamente competitivos no tienen necesariamente un valor v en el sentido definido en la Sección 1.7.1.

Tal vez nos gustaría proponer que el resultado ($2, $2) fuera considerado el valor del juego, pero no es cierto que el jugador I tiene una estrategia que le asegura un pago de 2 dólares, o de más, sea lo que sea lo que haga la jugadora II. El jugador I ha de jugar la estrategia pura l y confiar que la jugadora II elegirá la estrategia pura L para obtener un pago de 2 dólares. Pero si la jugadora II eligiera irracionalmente la estrategia pura R, el

[19] Sin embargo, cuando la información es imperfecta los juegos en equipo pueden ser realmente muy interesantes. Por ejemplo, su estudio nos puede enseñar cosas acerca de las maneras óptimas de comunicar información dentro de organizaciones cuyuos miembros comparten un mismo objetivo.

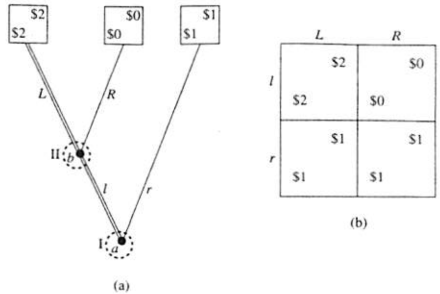


Figura 1.17. Un juego en equipo.

jugador I sólo conseguiría un pago de 0 dólares. El mayor pago que el jugador I puede asegurarse es 1 dólar. Se lo asegura eligiendo la pura estrategia r. El mayor pago que la jugadora II puede asegurarse también es 1 dólar, y se lo asegura jugando la estrategia pura L. (Esta elección le dará un pago de 2 dólares si el jugador I escoge l, pero sólo de 1 dólar si éste escoge r.)

En un capítulo posterior diremos que la estrategia pura r es la *estrategia de seguridad* del jugador I, y que el pago asegurado de 1 dólar es el *nivel de seguridad* del jugador I. Análogamente, la estrategia de seguridad de la jugadora II es L y su nivel de seguridad es 1 dólar. En un juego estrictamente competitivo ambos jugadores se aseguran el valor del juego llevando a cabo una de sus estrategias de seguridad. Unicamente observaremos por ahora que las estrategias de seguridad sólo son de importancia secundaria para un análisis del juego. En particular, no sería inteligente que el jugador I se preocupara excesivamente por lo que puede *asegurarse*. Si quiere llegar a tomar una decisión razonable sobre qué hacer, debe preocuparse de predecir la conducta futura de la jugadora II.

1.9.2. Equilibrios múltiples

En los juegos estrictamente competitivos estudiados en este capítulo la existencia de equilibrios múltiples no representa ningún problema. Un par de estrategias puras (s, t) es un equilibrio subjuego-perfecto para uno de estos juegos si y sólo si s le asegura al jugador I un resultado en cualquier

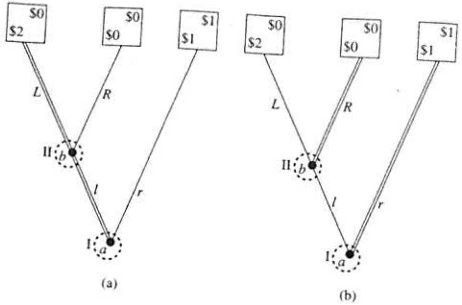


Figura 1.18. Un juego con estrategias de equilibrio no intercambiables.

subjuego no inferior a su valor, y t hace lo mismo para la jugadora II. Así pues, si (s, t) y (s', t') son dos equilibrios subjuego-perfectos, el jugador I, al elegir entre s y s', no tiene que preocuparse acerca de si la jugadora II elegirá t o t'. Cualquiera de las dos funcionará igual de bien. Si el jugador I escoge s y la jugadora II escoge t', entonces (s, t') continúa siendo un equilibrio subjuego-perfecto cuyo uso en cualquier subjuego proporcionará un resultado equivalente al valor del subjuego. (Técnicamente, decimos que (s, t) y (s', t') son equivalentes e intercambiables, como se explicará en la Sección 7.3.1.) Para juegos en general, sin embargo, los problemas que generan los equilibrios mútiples pueden ser muy enojosos.

El juego de la Figura 1.18 posee dos equilibrios de Nash, que son (l, L) y (r, R). Ambos son equilibrios subjuego-perfectos. Esto se puede comprobar usando el algoritmo de Zermelo. Sin embargo, en juegos que no son estrictamente competitivos es necesario prestar atención especial a lo que ocurre cuando un jugador tiene más de una elección óptima en un nodo. En juegos estrictamente competitivos se puede trabajar simplemente con un único árbol del juego y doblar *todos* los segmentos correspondientes a elecciones óptimas. En juegos que no son estrictamente competitivos, usualmente es necesario dibujar diagramas distintos para cada elección óptima de un nodo.

La Figura 1.18 ilustra este punto. Si se alcanza el nodo b, entonces la jugadora II es indiferente entre jugar L y R porque ambas elecciones conducen a que le paguen 0 dólares. Así pues, es necesario dibujar dos diagramas: la Figura 1.18(a), en que el segmento correspondiente a L ha sido doblado, y la Figura 1.18(b), en que el segmento correspondiente a R ha sido doblado. En la Figura 1.18(a), para el jugador I es óptimo elegir l. En la

Figura 1.18(b), es óptimo elegir r. Lo que es mejor para el jugador I en el nodo a, por tanto, depende en gran medida de su predicción de lo que haría la jugadora II en el nodo b si éste fuera alcanzado.

¿Qué consejo puede un especialista en teoría de juegos dar acerca de cuál de estos dos equilibrios elegir? Cuando se estudian juegos estrictamente competitivos este problema no se plantea. Pero aquí (l, L) y (r, R) no son equivalentes ni intercambiables. No son equivalentes porque el par de pagos ($2, $0) que resultan del uso de (l, L) no es el mismo que el par de pagos ($1, $1) que resultan del uso de (r, R). No son intercambiables porque, por ejemplo, si el jugador I juega l (pensando que la jugadora II jugará L) y la jugadora II juega R, el par resultante (l, R) no es un equilibrio.

Se podría argumentar que un libro de teoría de juegos debería recomendar el equilibrio (l, L) como la «solución» del juego partiendo de la base de que no existe razón alguna por la que la jugadora II debería ser aconsejada que negara «egoístamente» un pago de 2 dólares al jugador I, si alcanzaba el nodo b. Se podría responder argumentando que sería «egoísta» por parte del jugador I empezar por llevar el juego al nodo b. Pero se supone que los propios jugadores no tienen ningún tipo de preocupación acerca de si su conducta es, o no es, egoísta. Por hipótesis, sólo se preocupan acerca de cuánto dinero ganan. Por tanto, un especialista en teoría de juegos que prefiera un equilibrio a otro por razones éticas estará imponiendo a la situación sus propios juicios de valor o sus propios prejuicios.

En cualquier caso, existen otros argumentos. Se podría argumentar en favor del equilibrio (r, R) partiendo de la base que el jugador I «debería» creerse la amenaza de la jugadora II de que piensa jugar R. La razón es que ésta no tiene nada que perder cumpliendo su amenaza, si alcanza el nodo b. En contra de esta razón se da el hecho innegable de que tampoco tiene nada que ganar. Se podría argumentar que ella deseará cumplir su amenaza para «darle una lección al jugador I». Pero, por hipótesis, no está interesada en dar lecciones a nadie: sólo está interesada en cuánto dinero gana. Si se desea tomar en consideración otros factores que pueden motivar a los jugadores, se deberían alterar las preferencias de los jugadores sobre los resultados para reflejar este hecho.

No todos los especialistas en teoría de juegos comparten esta opinión, pero yo creo que la actitud apropiada frente al problema de la selección de equilibrios ha de ser la misma que la del matemático frente a una ecuación de segundo grado. Si le preguntamos cuál de las dos raíces recomienda como la solución «correcta», pensará que la pregunta es estúpida. Es una pregunta que no tiene ningún sentido en abstracto. Cuando surge una ecuación de segundo grado en un modelo construido para representar algún aspecto del mundo real, se calculan ambas raíces y entonces se estudia cuál de las dos tiene sentido para el fenómeno concreto del mundo real que el modelo quiere describir. Con frecuencia, por ejemplo, una de las raíces es positiva y la otra negativa, y esta última puede ser despreciada porque no tiene sentido aplicada al mundo real. Análogamente, la pregunta de qué equilibrio hay que elegir en un juego carece con frecuencia de sentido hasta

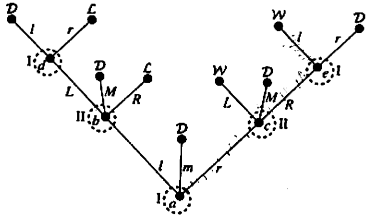


Figura 1.19. El juego del Ejercicio 1.10.1.

que no se considera el contexto al que se aplica el juego[20]. A veces, el examen detallado del contexto sugiere el estudio de un juego más complicado que posee un único equilibrio. Es más frecuente el caso, sin embargo, en que uno debe ejercitar su capacidad para enjuiciar modelos cuando toca elegir entre los equilibrios disponibles.

1.10. Ejercicios

1. La Figura 1.19 contiene el árbol de un juego G estrictamente competitivo de información perfecta sin jugadas de azar.
   a) ¿De cuántas estrategias puras dispone cada jugador?
   b) Hacer un listado de las estrategias puras de cada jugador usando la notación de la Sección 1.3.
   c) ¿Qué partida resulta al usar el par de estrategias puras (rll, LM)?
   d) Hallar todos los pares de estrategias puras que resultan en la partida $[rRl]$.
   e) Escribir la forma estratégica de G.
   f) Hallar todos los puntos de silla.
2. Las fichas de dominó se pueden colocar en un tablero $m \times n$ hasta cubrir dos cuadrados exactamente. Dos jugadores colocan fichas alternativamente. El primero que no puede colocar una ficha es el perdedor. Dibujar el árbol del juego para el caso $m = 2$ y $n = 3$.
3. La Figura 1.20 contiene el esqueleto del árbol de un juego llamado blackball. Un comité de tres miembros (I, II y III) de un club ha de seleccionar un nuevo miembro a partir de una lista de cuatro

[20] *Cognoscenti* no deberían interpretar esto como afirmando que nada se puede obtener del estudio de refinamientos de equilibrios de Nash. Unicamente se está afirmando que la pregunta de qué refinamiento hay que emplear, si es que hay emplear alguno, es una cuestión que habitualmente requiere más información de la que se codifica en la definición formal del juego.

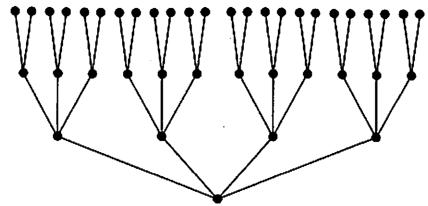


Figura 1.20. Un esqueleto para el árbol del blackball.

candidatos (A, B, C y D). Cada uno de los miembros del comité está autorizado a *blackbolear* (vetar) un candidato. Este derecho se ejerce rotativamente, empezando por el jugador I y terminando por el III.

En una copia de la Figura 1.20 márquese cada nodo no terminal con el número del jugador que decide en ese nodo. Los segmentos que representan las posibles elecciones en cada nodo han de ser marcadas con los candidatos que todavía pueden ser blackboleados. Cada nodo terminal ha de ser marcado con la letra del candidato elegido miembro del club cuando el juego termina allí.

¿De cuántas estrategias puras dispone cada jugador? ¿Qué información no ha sido proporcionada que es necesaria para analizar el juego?

4. Empezar a dibujar el árbol del ajedrez. Incluir por lo menos una partida completa en el diagrama.

Mates

5. Dos jugadores escogen alternativamente e indefinidamente entre 0 y 1. Una partida de este juego *infinito* puede identificarse, por tanto, con una sucesión de ceros y unos. Por ejemplo, la partida 101000... empezó con el jugador I escogiendo 1. Después, la jugadora II escogió 0, y tras ello el jugador I escogió 1 de nuevo. Después de ello ambos jugadores siempre escogen 0. Una sucesión de ceros y unos se puede interpretar como el desarrollo binario de un número real x que satisface $0 \leqslant x \leqslant 1$[21]. Dado un conjunto E de números reales, el jugador I gana si $x \in E$ pero pierde si $x \in \sim E$.

   Empezar a dibujar el árbol del juego.
6. Aplicar el algoritmo de Zermelo al juego G del Ejercicio 1.10.1. ¿Cuál es el valor de G? ¿Cuál es el valor del subjuego que empieza en el nodo b? ¿Cuál es el valor del subjuego que empieza en el nodo c? Demostrar que la estrategia pura rrr asegura que el jugador I

[21] Por ejemplo, $5/8 = 0.101000...$, porque $5/8 = 1(1/2) + 0(1/2)^2 + 1(1/2)^3 + \cdots$.

consigue por lo menos el valor de G. ¿Por qué el algoritmo de Zermelo no selecciona esta estrategia?

Fun 7. Aplicar el algoritmo de Zermelo a la versión 2×3 del juego de colocar fichas de dominó del Ejercicio 1.10.2. Hallar el valor del juego y determinar una estrategia ganadora para uno de los jugadores.

Fun 8. ¿Quién ganaría un juego del nim con $n \geqslant 2$ montones de cerillas tales que el k-ésimo montón contiene 2^{k-1} cerillas?[22]. Describir una partida del juego con $n = 3$ en el que el ganador juega óptimamente mientras el perdedor siempre se lleva una cerilla del montón con la mediana de cerillas. (El montón de la mediana es el montón de tamaño medio.)

Fun 9. Repetir el ejercicio anterior con $2^n - 1$ montones, de los cuales el k-ésimo contiene k cerillas.

Fun 10. ¿Quién dispone de una estrategia ganadora en el juego de colocar fichas de dominó del Ejercicio 1.10.2, cuando:

a) m y n son pares;
b) m es par y n es impar;
c) $m = n = 3$?

Justificar las respuestas.

Fun 11. Cuales son los movimientos de apertura ganadores en los juegos de los hexágonos 3×3, 4×4, 5×5?

Fun 12. Demostrar que en un tablero de hexágonos de $n \times (n + 1)$ el segundo jugador tiene una estrategia ganadora cuando el jugador que abre tiene que unir los lados más alejados.

Mates 13. El tablero de la Figura 1.21 representa el plano del centro de una ciudad. Los jugadores I y II representan bandas de gángsters. El

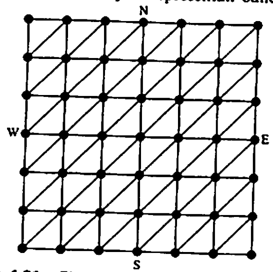


Figura 1.21. El plano de calles de una ciudad.

[22] Para empezar, intentar resolver el problema para valores concretos de n. Por ejemplo, $n = 3$.

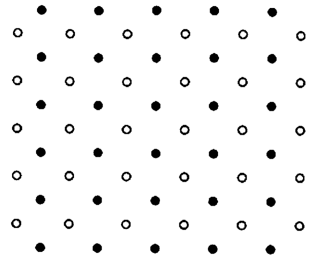


Figura 1.22. El tablero del bridgit.

jugador I controla las áreas al norte y sur de la ciudad. El jugador II controla las áreas al este y oeste. Los nodos en el plano de calles representan intersecciones de calles. Por turnos, los jugadores marcan nodos que todavía no han sido marcados. El jugador I usa un círculo como marca, y el jugador II una cruz. Un jugador que consigue marcar los dos extremos de una calle controla la calle. El jugador I gana si une el norte y el sur con un camino que controla. El jugador II gana si une el este y el oeste.

¿Por qué es este juego completamente equivalente a los hexágonos?

Mates 14. El juego del bridgit fue inventado por David Gale. Se juega en un tablero como el que muestra la Figura 1.22. Las negras intentan enlazar las partes superior e inferior uniendo horizontalmente o verticalmente nodos negros inmediatamente próximos. Las blancas intentan enlazar las partes derecha e izquierda uniendo horizontalmente o verticalmente nodos blancos inmediatamente próximos. Ninguno de los jugadores puede cruzar los enlaces del otro.

a) Hallar un argumento, del tipo del utilizado en los hexágonos, que demuestre que el juego no puede terminar en tablas.
b) ¿Por qué se sigue que alguien puede forzar una victoria?
c) ¿Por qué es el primer jugador el que dispone de una estrategia ganadora?
d) ¿Cómo es una estrategia ganadora?[23].

Mates 15. Dos jugadores se alternan removiendo nodos de un grafo conexo G. Excepto para la primera jugada, un jugador sólo puede remover

[23] No se desanime si no puede responder a esta última pregunta. ¡Es difícil!

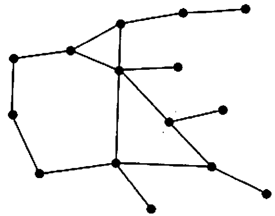


Figura 1.23. Un grafo G para el Ejercicio 1.10.15.

un nodo si está unido por un segmento al nodo removido por el anterior jugador. Pierde el jugador que se queda sin un nodo que sea legítimo remover.

Explicar por qué el segundo jugador tiene una estrategia ganadora si existe un conjunto E de segmentos que no tienen un extremo en común y tales que cada nodo es el extremo de un segmento del conjunto E. Demostrar que no existe tal conjunto E para el grafo de la Figura 1.23. Hallar una estrategia ganadora para el primer jugador.

Mates 16. El valor del ajedrez es desconocido. Puede ser $\mathcal{W}$, $\mathcal{D}$ o $\mathcal{L}$. Explicar por qué un argumento simple basado en robar la estrategia no puede ser usado para eliminar la posibilidad de que el valor del ajedrez es $\mathcal{L}$.

Mates 17. Explicar por qué el jugador I dispone de una estrategia ganadora en el juego de construcción de números del Ejercicio 1.10.5 si $E = \{x : x > 1/2\}$. ¿Cuál es la estrategia ganadora del jugador I cuando $E = \{x : x \geqslant 2/3\}$? ¿Cuál es la estrategia ganadora del jugador II cuando $E = \{x : x > 2/3\}$? Explicar por qué el jugador II dispone de una estrategia ganadora cuando E es el conjunto de todos los números racionales[24]. (Un número racional es lo mismo que una fracción.)

18. Sean (s, t) y (s', t') dos puntos de silla distintos de un juego estrictamente competitivo. Demostrar que (s, t') y (s', t) también son puntos de silla.

[24] Uno se podría preguntar si este juego infinito siempre tiene un valor para cualquier conjunto E. La respuesta es abstrusa. Si asumimos un principio de la teoría de conjuntos llamado el axioma de elección, entonces existen conjuntos E para los cuales el juego no tiene un valor. Algunos matemáticos, sin embargo, han propuesto reemplazar el axioma de elección por otro axioma que implicaría que el juego tiene un valor para cualquier conjunto E.

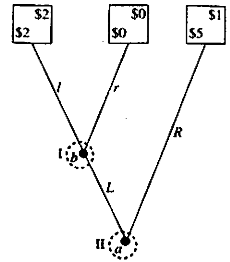


Figura 1.24. El juego de la cadena de supermercados de Selten.

19. Hallar todos los equilibrios de Nash del juego G del Ejercicio 1.10.1. ¿Cuáles de ellos son subjuego-perfectos?

20. Hallar los equilibrios subjuego-perfectos del blackball del Ejercicio 1.10.3 cuando las preferencias de los jugadores satisfacen:

$$A \succ_1 B \succ_1 C \succ_1 D,$$
$$B \succ_2 C \succ_2 D \succ_2 A,$$
$$C \succ_3 D \succ_3 A \succ_3 B.$$

¿Quién resulta elegido al club si se usa un equilibrio subjuego-perfecto? Hallar por lo menos un equilibrio de Nash que no sea subjuego-perfecto.

Econ 21. En el juego de la cadena de supermercados de la Figura 1.24, hallar:

a) La forma estratégica.
b) Las estrategias de seguridad de los jugadores.
c) Los niveles de seguridad de los jugadores.
d) Todos los equilibrios de Nash.
e) Todos los equilibrios subjuego-perfectos.

Econ 22. El juego de la cadena de supermercados del Ejercicio 1.10.21 es utilizado con frecuencia para ilustrar la lógica de la «disuasión de entrada». El jugador I es una empresa que monopoliza un sector económico y que gana 5 millones de dólares si se le deja disfrutar sin competencia de su privilegiada posición. El jugador II es una empresa que podría entrar en el sector, pero que gana 1 millón de dólares si escoge no entrar. Si quien está considerando entrar decide hacerlo, el monopolista puede hacer dos cosas: puede plantarle cara inundando el mercado con su producto para forzar precios a la baja, o puede aceptar su presencia y dividirse el mercado con él. La lucha perjudica a ambos jugadores, que únicamente ganan en este caso 0 millones de dólares cada uno. Si se dividen el mercado, cada uno ganará 2 millones de dólares.

a) Explicar cómo deberían ser interpretadas las acciones *l*, *r*, *L* y *R* de la Figura 1.24 para que el juego de la cadena de supermercados encajara en la situación descrita.

b) El actual monopolista amenaza al competidor potencial con luchar si éste desoye sus advertencias para que se mantenga fuera del sector. ¿Por qué éste no considerará que la amenaza es creíble?

c) ¿Qué ocurrirá si ambos jugadores actúan racionalmente?

Econon 23. ¿Cómo cambiarían las cosas en el Ejercicio 1.10.22 si, antes de empezar el juego, el monopolista actual pudiera demostrar al competidor potencial que estaba irrevocablemente decidido a luchar si éste entraba?

a) Escribir un nuevo árbol que represente la situación del Ejercicio 1.10.22 precedido por una jugada preliminar en la que el jugador I decide si se compromete, o no, a luchar si el jugador II llegara a entrar.

b) Hallar un equilibrio subjuego-perfecto del nuevo juego.

c) ¿Puede usted imaginar de qué forma el jugador I se podría comprometer irrevocablemente a luchar? Si es que sí, ¿cómo podría el jugador I convencer al II de que había adoptado tal compromiso?

Econ 24. El último apartado del Ejercicio 1.10.23 sirve para ilustrar que es muy difícil en la vida real comprometerse a seguir, si se dan determinadas contingencias, un futuro curso de acción que va contra los propios intereses. El sólo hecho de *decir* que uno se ha comprometido no convencerá a nadie que piense que usted es racional. Sin embargo, a veces es posible hallar acciones irreversibles que surten el mismo efecto que el de adquirir un compromiso. Como ocurre en la situación siguiente, habitualmente estas acciones han de ser costosas para que los otros jugadores puedan ver que usted está gastando dinero de acuerdo con las intenciones que sus palabras anuncian.

Supongamos que el monopolista actual del Ejercicio 1.10.22 puede decidir, antes de que ocurra nada, hacer una inversión irreversible para aumentar su capacidad de producción. Esto conllevará una pérdida de 2 millones de dólares si no utiliza la capacidad extra, pero la única ocasión para usar la capacidad extra sería proporcionada por la decisión de luchar contra el competidor entrante. En este caso, el monopolista actual ganará 1 millón de dólares en lugar de 0 millones de dólares porque la existencia de la capacidad extra abaratará su producción que inundará el mercado. Los pagos del jugador II permanecen inalterados.

a) Dibujar un nuevo árbol de juego que ilustre la nueva situación. Este tendrá cinco nodos, el primero de los cuales representa la decisión de invertir del jugador I. Si invierte, los pagos que resultan de acciones posteriores del juego deberán modificarse para tener en cuenta los costes y beneficios de la capacidad extra de producción.

b) Determinar el único equilibrio subjuego-perfecto.

c) Alguien que no sepa teoría de juegos podría decir que es necesariamente irracional invertir para obtener una capacidad extra de producción que uno cree que no usará jamás. ¿Como puede responder un especialista en teoría de juegos?

Econ 25. Hallar todos los equilibrios subjuego-perfectos del juego de la Figura 1.25. ¿Qué equilibrio recomendaría usted si los jugadores le pidieran consejo?

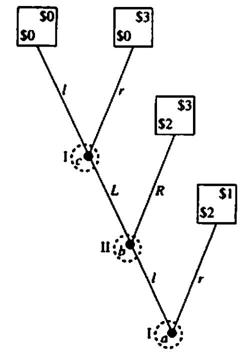


Figura 1.25. El juego del Ejercicio 1.10.25.