Teoría de Juegos
Modelos Rectangulares

Semestre 2020-2

Índice

UNIDAD 3. MODELOS RECTANGULARES O ESTRATÉGICOS

3.1. Presentación del modelo y definición

- Existen dos tipos de modelos para los juegos no cooperativos, el de los llamados juegos rectangulares o estratégicos y el de los juegos extensivos.
- Los juegos rectangulares resultan más fáciles de definir que los extensivos, pero hacer un modelo de este tipo sobre un conflicto real es más difícil

Definición 3.1.

- Un juego rectangular consta de un conjunto N, de una colección de conjuntos D_j, uno para cada j en N, y de una colección de funciones φ_j una para cada j en N, donde $\varphi_j\colon \prod_{j\in N} D_j \to R$

- a N le llamaremos el **conjunto de jugadores**,
- a cada D_j , el **conjunto de estrategias puras** del jugador j, y a φ_j la **función de pago** del jugador j .
- $(N, \{D_J\}_{j\in N}, \{\varphi_j\}_{j\in N})$ denotará el juego que tiene el conjunto de jugadores N, los conjuntos de estrategias puras D_j y las funciones de pago φ_j .
- D denota el producto cartesiano $\prod_{j\in N} D_j$ $(igual\ a$ $D_1 x D_2 x \dots x D_n$ si N es finito y tiene n elementos)
- a los elementos de D les llamaremos **perfiles de estrategias puras**

Juegos finitos e infinitos

- En dependencia del número de posibles estrategias los juegos se dividen en:
  1. Finitos

     Es el juego en el que el jugador solo tiene un número finito de estratègies. Esto es, N es finito.
  2. Infinitos

Definición 3.2

- Si N y los conjuntos D_J son finitos, se dice que el juego es finito.

- "cada jugador solo puede tener un número finito de estrategias"

Juego Finito

- A un juego finito en el que el jugador *A* puede tener *m* estrategias y el jugador *B*, *n* estrategias se le llama juego de *m x n*.
- Sea
  - un juego *m x n* de dos jugadores *A (ej. nosotros)* y *B (por ej, adversario)*
  - *con estrategias* A_i *y* B_j donde *i:* {*1, 2, 3, …,m*} y *j:* {*1, 2, 3, …,m*}

Juegos en Forma Normal (rectangular)

- Esta manera de describir un juego se basa sólo en estrategias: codifica toda la información de la forma extensiva en una matriz de pagos.

Representación de Juegos de dos jugadores en forma normal

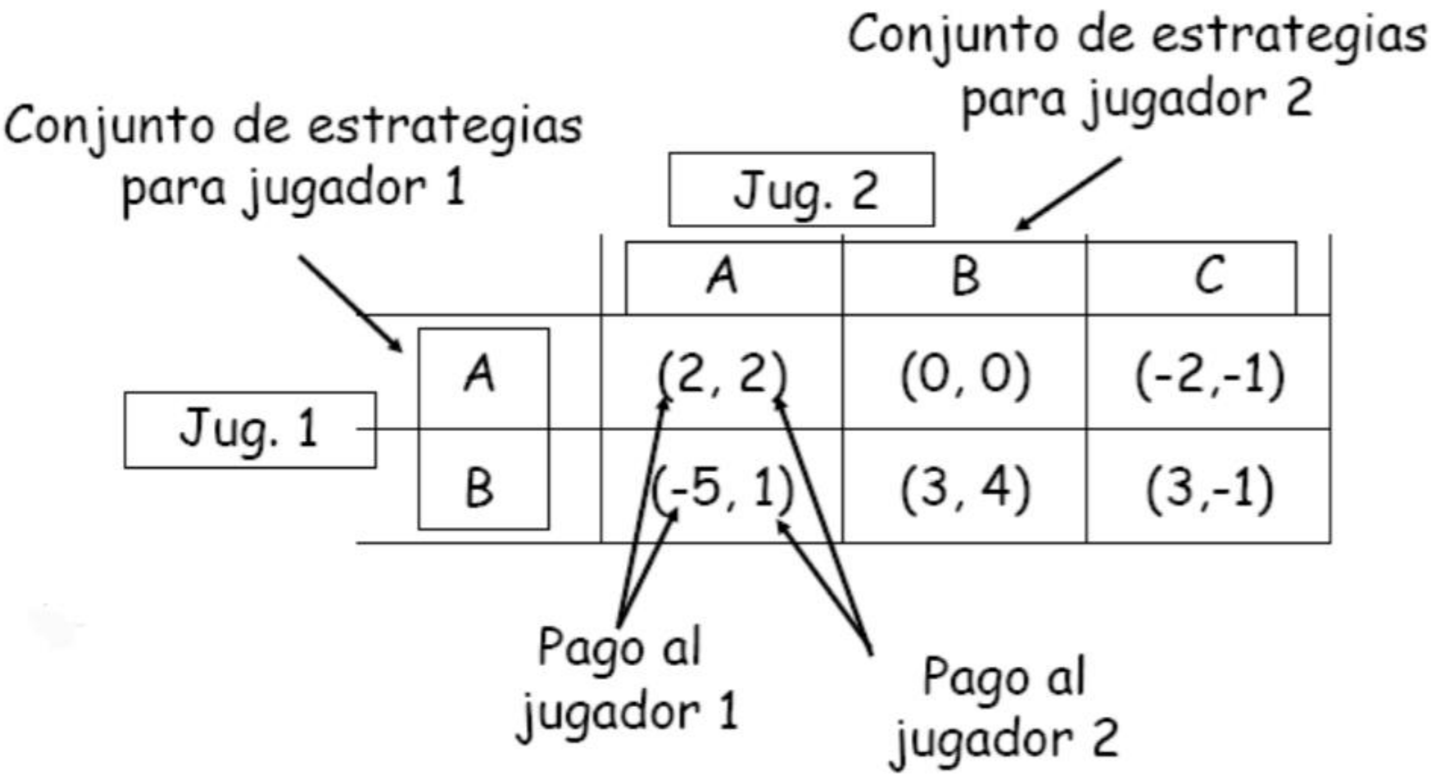
- Se hace un listado con las estrategias posibles de cada jugador.
- Se colocan las estrategias en una matriz.
- Las filas de la matriz corresponden a las estrategias del jugador 1, las columnas a las estrategias del jugador 2.
- Las ganancias de las ramas terminales se colocan en las casillas correspondientes de la matriz.

Para N=2

- Sea un juego finito donde $N = \{A, B\}$
- Sea
  - un juego m x n de dos jugadores A (ej. nosotros) y B (por ej, adversario)
  - con estrategias A_i y B_i donde i: $\{1,2,3 \ldots, n\}$ y j: $\{1,2,3 \ldots, m\}$

Representación de Juegos de dos jugadores en forma normal

- Representación de un juego



Ejemplo 3.1. El Dilema del Prisionero

	confesar	no confesar
confesar	(10 años, 10 años)	(libre, 20 años)
no confesar	(20 año, libre)	(2 años, 2 años)

- Revisemos si este juego cumple con la definición 3.1
- N =2; D_j = (Confesar, No Confesar); para j=1,2

$$\varphi(confesar),(no\ confesar) = (0,-20)$$
$$\varphi(no\ confesar),(no\ confesar) = (-2,-2)$$
$$\varphi(confesar),(confesar) = (-10,-10)$$
$$\varphi(no\ confesar),(confesar) = (-20,0)$$
$$\therefore\ el\ juego\ cumple\ con\ la\ definición$$

Ejemplo 3.2. Pagar la cuenta

- Tres amigos que desean pagar la cuenta a través de un disparejo definen dos reglas, si salen iguales la cuenta se divide en tres partes iguales; sino, paga el que quede disparejo.
- Revisemos si cumple con la definición de juego
- N =3; D_j = (pulgar arriba, pulgar abajo); para j=1,2,3

$$\varphi(pulgar\ arriba),(pulgar\ arriba)(pulgar\ arriba) = (\frac{C}{3},\frac{C}{3},\frac{C}{3})$$
$$\varphi(pulgar\ abajo),(pulgar\ arriba)(pulgar\ arriba) = (C,0,0)$$
$$\varphi(pulgar\ arriba),(pulgar\ abajo)(pulgar\ arriba) = (0,C,0)$$
$$\varphi(pulgar\ arriba),(pulgar\ arriba)(pulgar\ abajo) = (0,0,C)$$
$$\varphi(pulgar\ abajo),(pulgar\ abajo)(pulgar\ abajo) = (\frac{C}{3},\frac{C}{3},\frac{C}{3})$$
$$\varphi(pulgar\ arriba),(pulgar\ abajo)(pulgar\ abajo) = (C,0,0)$$
$$\varphi(pulgar\ abajo),(pulgar\ arriba)(pulgar\ abajo) = (0,C,0)$$
$$\varphi(pulgar\ abajo),(pulgar\ abajo)(pulgar\ arriba) = (0,0\ ,C)$$
$$\therefore\ el\ juego\ cumple\ con\ la\ definición$$

Perfil de Estrategias

- Un perfil de estrategias es y se denota

$$\sigma = \big((confesar), (no\ confesar)\big)$$

- Para el juego del disparejo un perfil de estrategias

$$\sigma = \big((pulgar\ arriba), (pulgar\ arriba)(pulgar\ abajo)\big)$$

Ejercicio 3.1.

- Revisar si el juego de la gallina, la batalla de los sexos, y el juego de piedra, papel y tijeras, cumplen con la definición de juego. (Exhibir todos los perfiles de estrategias)

Definición 3.3

- Se dice que σ^*en D es un **equilibrio de Nash** en estrategias puras, si para cada jugador j en N se cumple:

$$\varphi_j(\sigma^*) \geq \left(\sigma^* \middle| \sigma^j\right) \text{ para toda } \sigma^j \text{ en } D_j$$

Si la desigualdad es estricta, se dice que σ^* es un equilibrio estricto, es decir, si para cada j en N, $\varphi_j(\sigma^*) > \left(\sigma^* \middle| \sigma^j\right)$ para toda σ^j en D_j

Ejemplo 3.3.

- Dilema del Prisionero

	1	**2**
a	(-10,-10)	(0,-20)
b	(-20,0)	(-2,-2)

- Perfil de estrategias σ^*(confesar, no confesar)
  - Yo jugador uno, sé que el jugador dos va a confesar, entonces elijo lo mejor para mi que es confesar
  - Ahora, supongo que el jugador 2 no va a confesar y elijo lo mejor para mi que es confesar
  - Sí el jugador 2 hace un análisis similar, entonces se llega a la máxima ganancia conjunta que es el equilibrio de Nash.

- Matemáticamente se tiene:

$$\varphi_2\big((confesar),(cofesar)\big) \geq \varphi_2\ \big((confesar),(confesar)\big)$$

$$\varphi_2\big((confesar),(cofesar)\big) \geq \varphi_2\ \big((confesar),(no\ confesar)\big)$$

$$\varphi_2\big((confesar),(cofesar)\big) \geq \varphi_2\ \big((confesar),(confesar)\big)$$

$$\varphi_2\big((confesar),(cofesar)\big) \geq \varphi_2\ \big((no\ confesar),(confesar)\big)$$

$\therefore\ \sigma^*\ [(confesar)(confesar)]$ es un equilibrio de Nash

Ejemplo 3.4

	1	2
a	(7,9)	(2,4)
b	(1,5)	(5,7)
c	(6,15)	(9,2)

$$\varphi_1\big((a),(1)\big) \qquad \varphi_1\big((b),(1)\big)$$
$$7 \quad > \quad 1$$
$$\varphi_1\big((a),(1)\big) \qquad \varphi_1\big((c),(1)\big)$$
$$7 \quad > \quad 6$$
$$\varphi_1\big((a),(1)\big) \qquad \varphi_1\big((b),(1)\big)$$
$$7 \quad > \quad 1$$
$$\varphi_1\big((a),(1)\big) \qquad \varphi_1\big((b),(2)\big)$$
$$7 \quad > \quad 1$$
$$\therefore \sigma^*[(a)(1)]e, \in N$$

Ejemplo 3.5

	1	**2**
a	(7,-9)	(2,4)
b	(1,5)	(5,7)
c	(6,15)	(9,2)

$\therefore\ el\ juego\ no\ tiene\ equilibrio\ de\ Nash$

Ejercicio 3.2.

- Revisar si el juego de la gallina, la batalla de los sexos, y el juego de piedra, papel y tijeras, tienen equilibrio de Nash. (Exhibir todos los perfiles de estrategias)

Definición 3.4

Dado un perfil en estrategias $\hat{\sigma}$ en D, decimos que $\tilde{\sigma}^j$ *en* D^j es una mejor respuesta del jugador j a $\hat{\sigma}$, si

$$\varphi_j\left(\hat{\sigma}\middle|\tilde{\sigma}^j\right) \geq \varphi_j\left(\hat{\sigma}\middle|\sigma^j\right) \text{para toda } \sigma^j \text{en } D^j$$

Además, decimos que $\tilde{\sigma}^j \in D^j$es una mejor respuesta estricta de j a $\hat{\sigma}$, si

$\varphi_j\left(\hat{\sigma}\middle|\tilde{\sigma}^j\right) \geq \varphi_j\left(\hat{\sigma}\middle|\sigma^j\right)$, para toda σ^jen D^j, y $\varphi_j\left(\hat{\sigma}\middle|\tilde{\sigma}^j\right) > \varphi_j(\hat{\sigma})$

Es claro que σ^*es un equilibrio de Nash (estrategias puras) si y solo si σ^{*j}es una mejor respuesta de j a σ^* para toda j $\in N$

- Para los juegos bipersonales finitos resulta conveniente representar al juego con una matriz, a cada uno de sus renglones asignarle una de las estrategias del jugador 1, a cada una de las columnas, una del jugador 2 y el término de la matriz correspondiente al renglón i y a la columna j será el vector $(\varphi_1(i,j), \varphi_2(i,j))$
- De hecho podemos hablar de dos matrices de pago, la del jugador 1, $(\varphi_1(i,j))$ y la del jugador 2, $(\varphi_2(i,j))$, por eso, también se llaman juegos bimatriciales.

Juego de suma cero

- Decimos que un juego es de suma cero si $\sum_{j \in N} \varphi_j(\sigma) = 0$ para toda $\sigma \epsilon D$.
- entonces

	águila	**sol**
águila	$(-1,1)^0$	$(1,-1)^0$
sol	$(1,-1)^0$	$(-1,1)^0$

esto es, la suma de los pagos de cada elección es igual a cero.

Ejemplo 3.6. El juego del volado

Dos amigos quieren decidir a quién le toca ir a comprar los cigarros. El primero saca una moneda y la coloca sobre la mesa cubriéndola con la mano, le pide a su compañero que adivine cuál es la posición en la que la puso, ¿el águila (escudo) arriba o el sol (cara) ? Si es descubierto, tendrá que ir el mismo a la compra, pero si no, le tocará al segundo amigo. La matriz de pago es

	águila	**sol**
águila	(-1,1)	(1,-1)
sol	(1,-1)	(-1,1)

Es fácil observar que este juego no tiene equilibrio de Nash

Ejemplo 3.6. El juego del volado (2)

- En los juegos bipersonales de suma cero, basta trabajar con la función φ_1, función de pago del jugador 1, pues $\varphi_1 = -\varphi_2$, llamaremos φ a φ_1.

Actividad 3.3.

a. Los juegos de la gallina, batalla de los sexos y piedra, papel y tijeras PPT, son de suma cero?
b. ¿Cómo será la matriz del jugador 2?, si la matriz del jugador 1 es:

$$\begin{pmatrix} -7 & 2 & 4 \\ -1 & 3 & -5 \\ 0 & -8 & 6 \end{pmatrix}$$

Definición 3.5.

- Se dice que el número real x es asegurable en estrategias puras (ep) para el jugador j, si existe $\hat{\sigma}^j \in D_j$, tal que $\varphi_j(\sigma | \hat{\sigma}^j) \geq x$ para toda $\sigma \in D$.
- Consideramos, ahora, $A_j' = \{x \in R | x \; asegurable \; para \; j\}$

Proposición 3.5.1.

- Si el juego $\left(N, \{D_j\}, \varphi\right)$ $es\ finito, entonces\ para\ toda\ j \in N, existe\ el\ supremo\ de\ \widetilde{A_j'}$

Demostración

$Sea\ m_j = \min_{(\sigma|\sigma^j)} \varphi_j(\sigma|\sigma^j)\,, m_j\ existe,$

$pues\ el\ conjunto\ de\ valores\ que\ toma\ \varphi_j$ es finito

Asimismo, $m_j\ está\ en\ \widetilde{A_j'}, pues\ para\ cualquier\ \bar{\sigma}^j$

$\in D_j, \varphi_j(\sigma|\bar{\sigma}^j) \geq m_j. Por\ lo\ que\ \widetilde{A_j'} \neq 0$

$por\ otro\ lado, máx_j = \underset{(\sigma|\sigma^j)}{máx}\ (\sigma|\sigma^j)\, también\ existe$

$Para\ toda\ x \in \widetilde{A_j'}, existe\ \tilde{\sigma}^j \in D_j\ tal\ que\ \varphi_j(\sigma|\bar{\sigma}^j) \geq x.$

$Pero, máx_j \geq \varphi_j(\sigma|\bar{\sigma}^j) \geq x$

$Es\ decir \widetilde{A_j'}\ es\ un\ subconjunto\ de\ reales\ no\ vacío\ y$

$acotado\ superiormente, por\ lo\ que\ tiene\ supremo$

Proposición 3.5.2.

$$v_j' = \max_{\hat{\sigma}^j \in D_j} \min_{\sigma \in D} \varphi_j$$

Demostración.

$Sea\ x \in \widetilde{A_j'}, entonces\ existe\ \hat{\sigma}^j tal\ que\ \varphi_j\left(\sigma\middle|\hat{\sigma}^j\right)$
$\geq x, para\ toda\ \sigma\ en\ D$

$Tenemos\ que\ \min_{\left(\sigma\middle|\hat{\sigma}^j\right)} \varphi_j\left(\sigma\middle|\hat{\sigma}^j\right) \geq x$

$Pero, \max_{\hat{\sigma}^j \in D_j} \min_{\left(\sigma\middle|\hat{\sigma}^j\right)} \varphi_j\left(\sigma\middle|\sigma^j\right) \geq \min_{\left(\sigma\middle|\hat{\sigma}^j\right)} \varphi_j\left(\sigma\middle|\hat{\sigma}^j\right) \geq x$

$Es\ decir, \max_{\hat{\sigma}^j \in D_j} \min_{\left(\sigma\middle|\hat{\sigma}^j\right)} \varphi_j\left(\sigma\middle|\sigma^j\right) es\ una\ cota\ superior\ de\ \widetilde{A_j'}$

$Por\ lo\ que\ se\ cumple\ que\ \max_{\hat{\sigma}^j \in D_j} \min_{\left(\sigma\middle|\hat{\sigma}^j\right)} \varphi_j\left(\sigma\middle|\sigma^j\right) \geq v_j'$

$Por\ otro\ lado, existe\ \tilde{\sigma}^j \in D_j, tal\ que$

$$\varphi_j\left(\tilde{\sigma}\middle|\tilde{\sigma}^j\right) = \min_{\left(\sigma\middle|\hat{\sigma}^j\right)} \varphi_j\left(\sigma\middle|\tilde{\sigma}^j\right) = \max_{\hat{\sigma}^j \in D_j} \min_{\left(\sigma\middle|\hat{\sigma}^j\right)} \varphi_j\left(\sigma\middle|\sigma^j\right)$$

$Es\ decir, \max_{\hat{\sigma}^j \in D_j} \min_{\left(\sigma\middle|\hat{\sigma}^j\right)} \varphi_j\left(\sigma\middle|\sigma^j\right) \leq \varphi_j\left(\sigma\middle|\tilde{\sigma}^j\right), para\ toda\ \sigma \in D$

$Lo\ que\ significa\ que \max_{\hat{\sigma}^j \in D_j} \min_{\left(\sigma\middle|\hat{\sigma}^j\right)} \varphi_j\left(\sigma\middle|\sigma^j\right) \in \widetilde{A'_j}$

$Pero, entonces, \max_{\hat{\sigma}^j \in D_j} \min_{\left(\sigma\middle|\hat{\sigma}^j\right)} \varphi_j\left(\sigma\middle|\sigma^j\right) \leq v'_j$

$Por\ lo\ tanto, \max_{\hat{\sigma}^j \in D_j} \min_{\left(\sigma\middle|\hat{\sigma}^j\right)} \varphi_j\left(\sigma\middle|\sigma^j\right) = v'_j$

$Diremos\ que\ \hat{\sigma}^{j}\ es\ una\ estrategia\ conservadora\ (ep)$ $para\ el\ jugador\ j,$ si éste $gana\ por\ lo\ menos\ v_j',$ $cuando$ $escoge\ \hat{\sigma}^{j}.$ $A\ v_j'$ $se\ le\ llamar$á $el\ m$á$ximo\ asegurable\ para\ el$ $jugador\ j\ en\ estrategias\ puras\ (ep).$ $En\ el\ proceso\ de\ la$ $prueba\ se\ ha\ demostrado\ que\ existen\ estrategias$ $conservadoras\ (ep),$ $para\ cualquier juego\ y\ para\ cada$ $jugador.$

Ejemplo 3.7.

- *Juego de suma cero*
- $$\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\
\begin{array}{c} a \\ b \\ c \end{array} & \begin{bmatrix} (-\mathbf{7}, 7)^0 & (\mathbf{2}, -2)^0 & (\mathbf{4}, -4)^0 \\ (-\mathbf{1}, 1)^0 & (\mathbf{3}, -\mathbf{3})^0 & (-\mathbf{5}, 5)^0 \\ (\mathbf{0}, \mathbf{0})^0 & (-\mathbf{8}, 8)^0 & (\mathbf{6}, -6)^0 \end{bmatrix}
\end{array}
\begin{array}{c} \textbf{mín} \\ -\mathbf{7} \\ -\mathbf{5} \\ -\mathbf{8} \end{array}
\quad mínmáx{=}V_1 = -5$$

máx **0** **-3** **-6** $\quad máxmín{=}V_2 = 0$

Máximo asegurable del juego Max=0 ($juego\ de\ suma\ cero$)

$\therefore V_1 = -5, V_2 = 0$*, Max= 0*

De otra manera:

$$V_1 = mínmáx\ \varphi_j = mín(-7, -5, -8) = -5$$

$$V_2 = máxmín\ \varphi_j = máx(0, -3, -6) = 0$$

Actividad 3.4.

- Sea el juego de suma cero

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{array}{c} a \\ b \\ c \end{array} & \begin{pmatrix} -7 & 2 & 4 \\ -1 & 3 & -5 \\ 0 & -8 & 6 \end{pmatrix} \end{array}$$

Encontrar $V_1, V_2\ y\ Max$